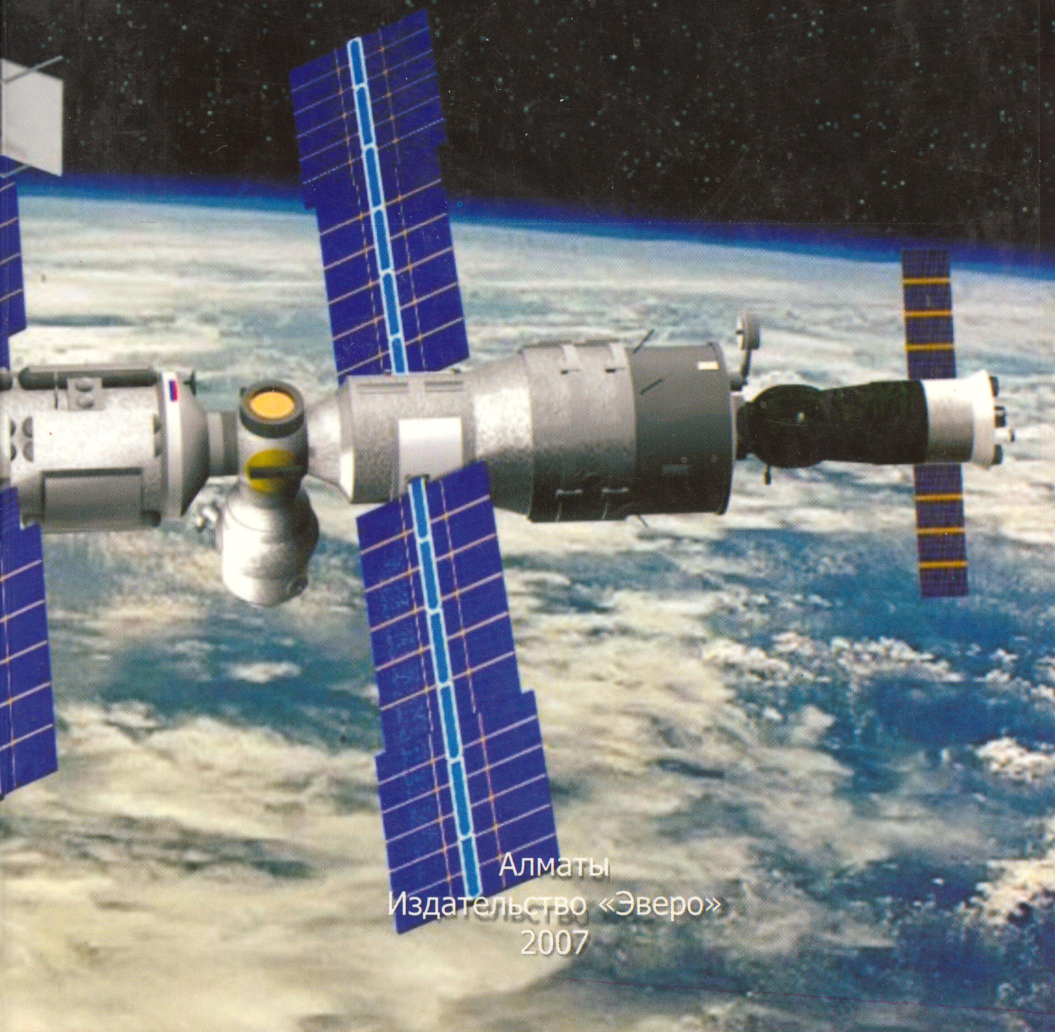
Ю.Г. Савинов

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

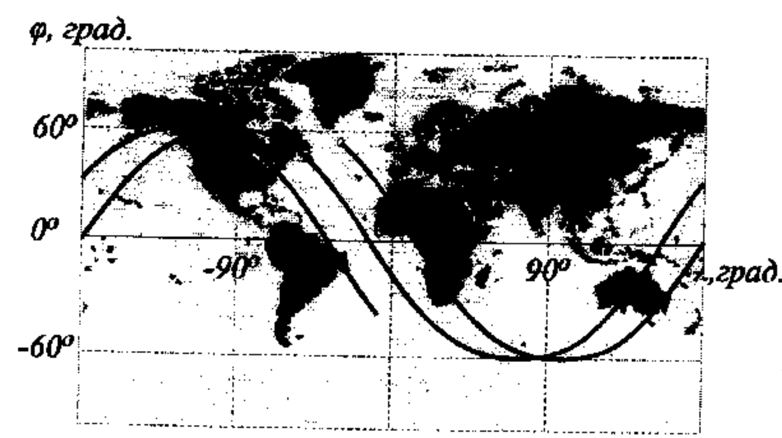


Алматы
Издательство «Эверо»
2007

Казахский национальный ,ниверситет им. аль-Фараби

Ю.Г. Савинов

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ



Алматы 2007

УДК 629.78
ББК 39.52
С 13

Рекомендовано к изданию ученым советом механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор *С.А. Айсагалиев*;
кандидат технических наук, доцент *Н.М. Глыбовский*

Савинов Ю.Г.

С 13 Анализ и оптимизация траекторий движения космических летательных аппаратов. – Алматы: Изд-во «Эверо», 2007. – 160 с.

ISBN 9965-769-69-9

Рассматриваются математические модели движения ракет-носителей и космических аппаратов, основы космической навигации, теоретические сведения, численные методы и прикладные задачи оптимизации управления движением. Приведены задания для практических занятий и лабораторных работ с применением ЭВМ, а также методические указания к лабораторным работам.

Предназначено для научных работников, докторантов, магистрантов и студентов старших курсов, изучающих теорию движения, навигацию и управление движением космических летательных аппаратов.

ББК 39.52

С $\frac{3206030000}{00(05)-07}$

ISBN 9965-769-69-9

СОДЕРЖАНИЕ

Список сокращений 5

Предисловие 6

1 Выведение ракеты-носителя на околоземную орбиту 7

1.1 Матрицы перехода между системами координат 7
1.2 Основные системы координат 8
1.3 Силы и моменты, действующие на РН на активном участке траектории 15
1.4 Дифференциальные уравнения движения РН 20
1.5 Уравнения плоского движения РН 23
1.6 Приближенный метод определения скорости РН 30

2 Движение космических аппаратов 34

2.1 Уравнения движения КА в центральном поле тяготения (задача двух тел) 34
2.2 Классификация невозмущенных траекторий КА 37
2.3 Орбитальное невозмущенное движение КА. Элементы орбиты 41
2.4 Трассы искусственных спутников Земли 45
2.5 Компланарные маневры КА 50
2.6 Пространственные маневры КА 57
2.7 Задача трех тел 60

3 Основы космической навигации 66

3.1 Основные понятия. Классификация измерительных средств, измеряемых параметров и методов обработки результатов измерений 66
3.2 Использование метода наименьших квадратов при обработке результатов измерений 67
3.3 Определение координат КА по измеренным дальностям 71
3.4 Определение координат КА по измеренным угловым величинам 73
3.5 Определение вектора скорости КА 78
3.6 Определение координат КА по избыточному количеству измеренных дальностей 82
3.7 Навигационные характеристики спутниковых навигационных систем 87
3.8 Орбитальная группировка спутниковой навигационной системы ГЛОНАСС 91
3.9 Методы решения навигационных задач СНС 93

4 Вход в атмосферу и посадка ... **98**
4.1 Условия входа КА в атмосферу ... 98
4.2 Расчет внеатмосферного участка траектории ... 101
4.3 Уравнения движения КА в атмосфере ... 103
4.4 Аэродинамический нагрев и теплозащита КА ... 108

5 Оптимизация траекторий движения ЛА ... **113**
5.1 Сведения из классического вариационного исчисления ... 113
5.2 Принцип максимума Л.С.Понтрягина ... 117
5.3 Численные методы решения задач оптимального управления ... 122
5.4 Метод градиента ... 126
5.5 Метод штрафных функций ... 129
5.6 Задача о выборе оптимальной программы выведения на орбиту ... 130
5.7 Задача о выборе оптимальной программы сближения с целью, находящейся на орбите ... 136
5.8 Задача о выборе оптимальной программы управления спуском с орбиты, обеспечивающей максимальный боковой маневр ... 139
5.9 Задача о выборе оптимальной программы управления спуском с орбиты, обеспечивающей минимальный приток тепловой энергии ... 143
5.10 Задача о выборе оптимальной программы управления при посадке на Луну ... 146

Литература ... **150**

Приложение А Текст процедуры sqropt ... **152**

Приложение Б Текст процедуры trc_DM ... **156**

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

В работе использованы следующие сокращения:

АУТ – активный участок траектории
ИП – измерительный пункт
ИС – измерительное средство
ИСЗ – искусственный спутник Земли
ИСК – измерительная система координат
ЗО – зона обслуживания
КА – космический аппарат
ЛА – летательный аппарат
НКА – навигационный космический аппарат
ОГ – орбитальная группировка
РН – ракета-носитель
СК – система координат
СКО – среднеквадратичное отклонение
СНС – спутниковая навигационная система

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее пособие вошли материалы семинара по подготовке и повышению квалификации специалистов в рамках Государственной программы «Развитие космической деятельности в Республике Казахстан на 2005-2007 гг.», состоявшегося 4-15 декабря 2006 г. в КазНУ им. аль-Фараби.

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены задачи, связанные с анализом и оптимизацией траекторий движения различных летательных аппаратов (ЛА), в том числе ракет-носителей (РН), космических аппаратов (КА) и др. Предполагается, что целью исследований является расчет траекторий движения ЛА и, во многих случаях, выбор оптимальных (рациональных) по некоторому критерию траекторий. Для каждого класса задач рассмотрены математические модели движения и указаны основные способы решения задач. Наряду с аналитическим решением модельных задач рассмотрение материала ориентирует на численное решение прикладных задач с применением ЭВМ.

В разделе 1 изложены общие вопросы движения ЛА, рассмотрены силы и моменты, действующие на ЛА в полете, приведены и проанализированы уравнения движения РН на активном участке траектории.

Раздел 2 посвящен исследованию движения КА в центральном поле тяготения и задачам маневрирования КА, связанным с межорбитальными переходами.

В разделе 3 рассмотрены вопросы космической навигации, т.е. определения и прогнозирования координат и скорости КА по результатам измерений и их обработки, а также методы решения навигационных задач с использованием спутниковых навигационных систем (СНС).

Раздел 4 посвящен анализу движения КА при спуске с околоземной орбиты.

Раздел 5 содержит сведения об аналитических и численных методах решения задач оптимизации траекторий движения ЛА, а также применение рассмотренных методов для решения прикладных задач.

Приведены задания для практических занятий и лабораторных работ с применением ЭВМ, а также методические указания к лабораторным работам. В разделе 5 приведены задачи, которые могут предлагаться в качестве заданий на курсовые работы.

Учебное пособие предназначено для научных работников, докторантов, магистрантов и студентов старших курсов, изучающих теорию движения, навигацию и управление движением космических летательных аппаратов.

Автор выражает искреннюю благодарность директору НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, д.ф-м.н., проф. Н.Т. Данаеву, заведующему кафедрой теории управления, д.т.н., проф. С.А. Айсагалиеву, к.ф.-м.н., доц. Ш.А. Айпанову за помощь в издании данного пособия.

***Ю.Г. Савинов**, академик Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, зам. директора филиала «Восход» Московского авиационного института, г. Байконур*

1 ВЫВЕДЕНИЕ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ НА ОКОЛОЗЕМНУЮ ОРБИТУ

1.1 Матрицы перехода между системами координат

Рассмотрим некоторую исходную систему координат (СК) $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и наряду с ней систему координат $Ox_1x_2x_3$, повернутую относительно исходной. Положение повернутой СК относительно исходной может быть задано при помощи матрицы

$$\mathbf{A}_{\xi x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

элементы a_{ij} которой представляют косинусы углов между i-м ортом повернутой и j-м ортом исходной системы координат. Пусть в исходной системе какой-либо вектор $\mathbf{v}$ задан матрицей-столбцом его компонент $[v_1; v_2; v_3]^T$ (символ «T» означает транспонирование матрицы). Тогда в повернутой СК столбец компонент того же вектора $[v'_1; v'_2; v'_3]^T$ вычисляется по формуле

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Поэтому матрицу $\mathbf{A}_{\xi x}$ называют матрицей перехода от системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$.

В дальнейшем будем отождествлять понятие вектора и матрицы его компонент в заданной СК и записывать $\mathbf{v} = [v_1; v_2; v_3]^T$, предполагая, что при повороте системы координат справедливы правила преобразования компонент (1.1). Если в соотношении будут использоваться компоненты одного вектора, представленные в разных системах координат, то будем помечать их соответствующими индексами. Например, (1.1) перепишем в виде $\mathbf{v}_x = \mathbf{A}_{\xi x}\mathbf{v}_\xi$, где $\mathbf{v}_x$ и $\mathbf{v}_\xi$ – матрицы компонент вектора $\mathbf{v}$, соответственно, в повернутой и исходной системах координат.

Обратный переход (от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$) задается транспонированной матрицей $(\mathbf{A}_{\xi x})^T$

$$\mathbf{v}_\xi = (\mathbf{A}_{\xi x})^T \mathbf{v}_x = \mathbf{A}_{x\xi}\mathbf{v}_x.$$

Ясно, что имеет место соотношение

$$\mathbf{A}_{\xi x}(\mathbf{A}_{\xi x})^T = \mathbf{E}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, т.е. матрица $(\mathbf{A}_{\xi x})^T$ является обратной матрицей по отношению к $\mathbf{A}_{\xi x}$.

Из (1.2) следует, что определитель матрицы $\mathbf{A}_{\xi x}$ равен единице (в дальнейшем рассматриваются только правые системы координат).

Далее, если переход от системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$ задается тремя последовательными поворотами, определяемыми матрицами $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, то матрица перехода $\mathbf{A}_{\xi x}$ находится как произведение матриц элементарных поворотов, взятых в обратной последовательности: $\mathbf{A}_{\xi x} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.

В этом случае для обратного перехода (от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$) имеем матрицу $\mathbf{A}_{x\xi} = \mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_3^T$.

Например, пусть первый элементарный поворот производится вокруг оси $O\xi_1$ на угол α до перехода к системе $O\xi_1'\xi_2'\xi_3'$, второй – вокруг оси $O\xi_2'$ на угол β до перехода к системе $O\xi_1''\xi_2''\xi_3''$, а третий – вокруг оси $O\xi_3''$ на угол γ до перехода к системе $Ox_1x_2x_3$. Тогда для матрицы результирующего перехода имеем выражение

$$\mathbf{A}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Матрицы перехода используют для пересчета компонентов векторов скоростей, сил, ускорений из одной системы координат в другую.

Задача 1.1 Заданы некоторые элементы матрицы $\mathbf{A}$ – матрицы перехода от одной системы координат к другой:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Найти возможные значения недостающих элементов матрицы $\mathbf{A}$, считая, что обе системы координат – правые, а элемент $a_{31} > 0$.

1.2 Основные системы координат

Абсолютная геоцентрическая (экваториальная) система координат $Ox_{za}y_{za}z_{za}$. Начало ее расположено в центре Земли, а оси ориентированы неподвижно относительно звездного неба. Ось Ox_{za} направлена в плоскости экватора в точку весеннего равноденствия Υ (точку на звездном небе, через которую проходит Солнце в момент пересечения плоскости экватора при переходе в северное полушарие). Ось Oz_{za} направлена по оси вращения Земли в сторону се-

верного полюса, а ось Oy_{za} дополняет систему до правой.

Заметим, что эту систему координат можно считать инерциальной лишь при рассмотрении движения ЛА вблизи поверхности Земли.

Относительная геоцентрическая (экваториальная) система координат $Ox_zy_zz_z$. Начало ее расположено в центре Земли, а оси остаются неподвижными относительно вращающейся Земли. Оси системы $Ox_zy_zz_z$ совпадают с осями абсолютной системы координат в момент, когда начальный (гринвичский) меридиан, с которым связана ось Ox_z, проходит через плоскость $Ox_{za}z_{za}$. С этого момента начинается отсчет местного звездного времени гринвичского меридиана S.

Для перехода от относительной системы координат к абсолютной пользуются матрицей

$$\mathbf{A}_{z\,za} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_e S) & -\sin(\omega_e S) & 0 \\ \sin(\omega_e S) & \cos(\omega_e S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.3)$$

где $\omega_e = 7{,}292115 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ – скорость вращения Земли.

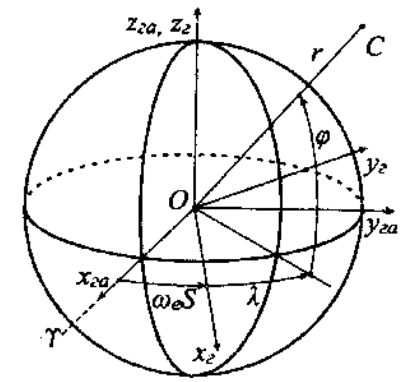


Рис. 1.1. Абсолютная и относительная геоцентрические системы координат

Положение центра масс ЛА в этой системе задается двумя углами – *долготой* λ и *геоцентрической широтой* φ, а также радиусом r от центра Земли (рис. 1.1). Долгота λ – двугранный угол между плоскостями начального (гринвичского) меридиана и меридиана, проходящего через центр масс ЛА (расположенный в точке C).

Долгота может изменяться в диапазоне $-180^\circ \le \lambda \le 180^\circ$, причем положительные значения соответствуют восточному полушарию, а отрицательные – западному. Геоцентрическая широта φ – это угол между радиусом-вектором точки C и плоскостью экватора. Широта может принимать значения $-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$; положительные значения соответствуют северному полушарию, а отрицательные – южному.

Высота определяется как расстояние по радиусу-вектору между точкой C и поверхностью Земли. При фиксированном радиусе r высота зависит от принятой модели фигуры Земли.

Наряду с геоцентрической широтой вводится понятие *геодезической широты* как угла между плоскостью экватора и линией отвеса, проведенной вверх из точки C.

Горизонтальная топоцентрическая система координат $Px_my_mz_m$. Начало ее совмещено с точкой P стояния наблюдателя на поверхности Земли. Ось

Px_m направлена в плоскости местного горизонта в направлении на север. Ось Py_m направлена по линии отвеса вверх; ось Pz_m дополняет систему координат до правой (рис. 1.2).

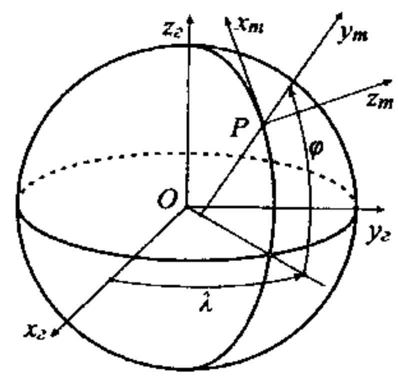


Рис. 1.2. Горизонтальная топоцентрическая система координат $Px_my_mz_m$

Положение этой системы координат относительно системы $Ox_zy_zz_z$ определяется долготой λ и геодезической широтой φ точки стояния наблюдателя P.

Рассмотрим переход от системы координат $Px_my_mz_m$ к системе $Ox_zy_zz_z$, предполагая, что начала обеих систем совпадают ($P = O$). Осуществление указанного перехода требует три последовательных поворота системы координат. Первый поворот выполняется на угол φ вокруг оси Pz_m. Второй переход происходит вокруг промежуточной оси Px' на угол $(90° - \lambda)$. Третий поворот выполняется вокруг оси Py_z на угол $90°$. Матрица перехода имеет вид

$$\mathrm{A}_{mz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & -\cos\lambda & \sin\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\cos\lambda\sin\varphi & \cos\lambda\cos\varphi & -\sin\lambda \\ -\sin\lambda\sin\varphi & \sin\lambda\cos\varphi & \cos\lambda \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

При известном радиус-векторе $\mathbf{r}_m = [x_m, y_m, z_m]^T$ точки в системе координат $Px_my_mz_m$ радиус-вектор этой точки $\mathbf{r}_z$ в системе координат $Ox_zy_zz_z$ представляет сумму $\mathbf{r}_z = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_m$, где $\mathbf{r}_P$ – радиус-вектор точки P, проведенный из точки O. В системе координат $Ox_zy_zz_z$ имеем соотношение

$$\mathbf{r}_z = \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p\cos\lambda_p\cos\varphi_p \\ r_p\sin\lambda_p\cos\varphi_p \\ r_p\sin\varphi_p \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{mz}\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix},$$

где $r_p, \varphi_p, \lambda_p$ – координаты точки P.

Стартовая система координат $Px_cy_cz_c$. Начало ее совмещено с местом центра масс ЛА в момент старта. Ось Px_c расположена в касательной плоскости к поверхности Земли в точке старта (плоскости местного горизонта) и ориентирована в направлении прицеливания. Ось Py_c направлена по линии отвеса вверх; ось Pz_c дополняет систему координат до правой.

Переход от системы координат $Px_cy_cz_c$ к горизонтальной топоцентрической

системе $Px_my_mz_m$ иллюстрируется на рис. 1.3, где Ψ – азимут направления прицеливания. Для перехода от системы координат $Px_cy_cz_c$ к системе $Ox_zy_zz_z$ (предполагая, что $P = O$) используем матрицу

$$\mathbf{A}_{cz} = \mathbf{A}_{mz}\mathbf{A}_{cm} = \mathbf{A}_{mz}\begin{bmatrix} \cos\Psi & 0 & -\sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

причем компоненты $\mathbf{A}_{mz}$ определяются по формуле (1.4) координатами φ, λ точки старта.

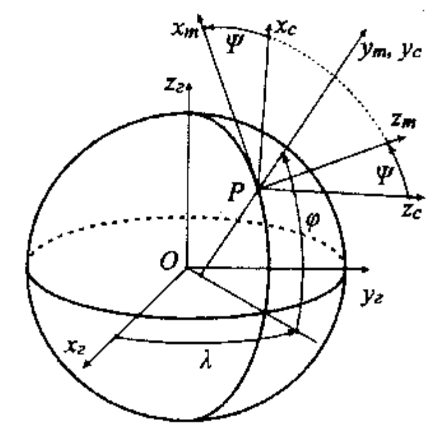


Рис. 1.3. Переход от стартовой системы координат $Px_cy_cz_c$ к горизонтальной топоцентрической системе $Px_my_mz_m$

Поскольку стартовая СК не является инерциальной, то в ряде случаев удобнее воспользоваться *начальной стартовой системой координат* $P_нx_нy_нz_н$, которая совпадает со стартовой системой в момент запуска ЛА, а в дальнейшем не меняет своей ориентации относительно абсолютной системы координат, т.е. является инерциальной. Направление осей системы $P_нx_нy_нz_н$ можно задавать на борту ЛА, например, с помощью трехосной гиростабилизированной платформы.

Для перехода от системы координат $P_нx_нy_нz_н$ к системе $Ox_{za}y_{za}z_{za}$ используется матрица $\mathbf{A}_{н\,za}$, по структуре аналогичная матрице $\mathbf{A}_{cz}$. Однако здесь вместо угла λ нужно взять угол $\delta = \lambda + \omega_e S$. Перемножив матрицы, получим

$$\mathbf{A}_{нza} = \begin{bmatrix} -\cos\delta\sin\varphi\cos\Psi - \sin\delta\sin\Psi & \cos\delta\cos\varphi & \cos\delta\sin\varphi\sin\Psi - \sin\delta\cos\Psi \\ -\sin\delta\sin\varphi\cos\Psi + \cos\delta\sin\Psi & \sin\delta\cos\varphi & \sin\delta\sin\varphi\sin\Psi + \cos\delta\cos\Psi \\ \cos\varphi\cos\Psi & \sin\varphi & -\sin\varphi\sin\Psi \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Связанная система координат $Cxyz$. Начало ее расположено в центре масс ЛА; ось Cx направлена вдоль продольной оси аппарата. Ось Cy направлена в плоскости симметрии ЛА или в какой-либо другой плоскости, фиксированной с помощью меток относительно корпуса ЛА. Обычно для осесимметричного ЛА ось Cy направлена в так называемой плоскости стабилизации I-III (вдоль оси I), которая в момент старта совпадает с плоскостью прицеливания. Ось Cz дополняет систему до правой.

Найдем матрицу перехода от начальной стартовой к связанной СК. Пусть начала обеих систем совпадают ($P_н = C$). Переход осуществляется путем трех последовательных поворотов системы координат (рис. 1.4). Первый поворот выполняется на угол ψ вокруг оси $P_нy_н$. Второй поворот происходит вокруг промежуточной оси $P_н z'$ на угол ϑ. Третий поворот выполняется вокруг связанной оси $P_н x$ на угол γ.

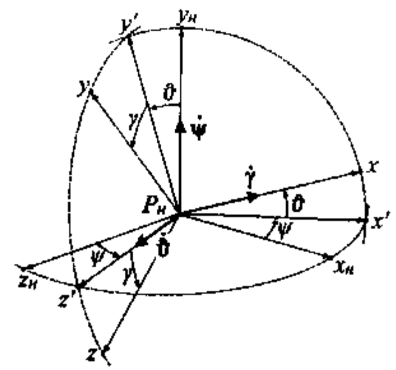


Рис. 1.4. Переход от начальной стартовой к связанной системе координат

Матрицы перехода, соответствующие поворотам на углы ψ, ϑ, γ, имеют вид

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{1.7}$$

$$\mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода от начальной стартовой к связанной СК может быть получена путем перемножения этих матриц:

$$\mathbf{A}_{нсв} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\vartheta \mathbf{A}_\psi =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi \\ \sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi & \cos\gamma\cos\vartheta & \sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi & -\sin\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Обычно именно углы ψ, ϑ, γ измеряются на борту ЛА с помощью датчиков системы управления. Угол ψ между проекцией продольной оси ЛА Cx на горизонтальную плоскость $P_н x_н z_н$ и осью $P_н x_н$ называют *углом рыскания*. Угол ϑ между продольной осью ЛА и плоскостью $P_н x_н z_н$ называют *углом тангажа*. Угол γ между нормальной осью ЛА Cy и плоскостью $P_н x y'$ называют *углом крена* или *углом вращения*.

Вектор угловой скорости ЛА можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}, \tag{1.9}$$

где $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot\gamma\, \mathbf{i}_\gamma$; $\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \dot\vartheta\, \mathbf{i}_\vartheta$; $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot\psi\, \mathbf{i}_\psi$, причем единичные векторы $\mathbf{i}_\gamma$, $\mathbf{i}_\vartheta$, $\mathbf{i}_\psi$ направлены по осям, относительно которых происходят вращения, т.е. по осям, соответственно, $P_н x$, $P_н z'$, $P_н y_н$. Проецируя соотношение (1.9) на оси связанной системы координат, найдем:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dot\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\gamma \dot\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\vartheta \dot\psi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\gamma + \dot\psi\sin\vartheta \\ \dot\vartheta\sin\gamma + \dot\psi\cos\gamma\cos\vartheta \\ \dot\vartheta\cos\gamma - \dot\psi\sin\gamma\cos\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Отсюда можно получить следующие кинематические соотношения:

$$\dot\psi = (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)\frac{1}{\cos\vartheta};$$

$$\dot\vartheta = \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma; \tag{1.11}$$

$$\dot\gamma = \omega_x - (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)\,\mathrm{tg}\,\vartheta, \quad (\cos\vartheta \neq 0).$$

Скоростная система координат. Для ЛА, имеющего плоскость симметрии, скоростная СК $Cx_a y_a z_a$ вводится следующим образом. Начало ее расположено в центре масс ЛА; скоростная ось Cx_a направлена по вектору воздушной скорости $\mathbf{V}_a$ (т.е. по вектору скорости ЛА относительно воздушной среды). Ось подъемной силы Cy_a направлена в плоскости симметрии ЛА, а боковая ось Cz_a дополняет систему до правой (рис. 1.5).

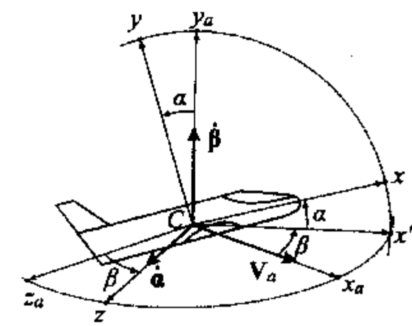


Рис. 1.5. Скоростная система координат $Cx_a y_a z_a$

Положение этой системы координат относительно системы $Cxyz$ определяется двумя углами. Угол α между проекцией вектора $\mathbf{V}_a$ на плоскость симметрии и осью Cx называется *углом атаки*. Угол β между вектором $\mathbf{V}_a$ и плоскостью симметрии называется *углом скольжения*.

Переход от скоростной системы координат к связанной осуществляется при помощи двух последовательных поворотов: сначала на угол β вокруг оси Cy_a, а затем – на угол α вокруг оси Cz. Матрицы перехода, соответствующие элементарным поворотам на углы β и α, имеют вид

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Тогда матрица перехода от скоростной к связанной СК может быть получена в виде

$$\mathbf{A}_{асв} = \mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Матрица $\mathbf{A}_\beta$ задает переход от скоростной к *полусвязанной системе координат*, повернутой относительно связанной системы на угол атаки α.

Для осесимметричного ЛА обычно рассматривается *пространственный угол атаки* $\alpha_п$ между вектором $\mathbf{V}_a$ и продольной осью ЛА. В этом случае вводят *модифицированную скоростную систему координат* $Cx_м y_м z_м$, связанную с углом $\alpha_п$, ось $Cx_м$ которой совпадает с направлением вектора $\mathbf{V}_a$, ось $Cy_м$ расположена в *плоскости угла атаки*, проходящей через вектор $\mathbf{V}_a$ и продольную ось ЛА. Ось $Cz_м$ дополняет систему до правой (рис. 1.6). Здесь дополнительно вводят угол крена γ_a, отсчитываемый от плоскости угла атаки. Тогда переход от системы координат $Cx_мy_мz_м$ к системе $Cxyz$ может быть выполнен при помощи двух последовательных поворотов: сначала на угол α_n вокруг оси $Cz_м$, а затем – на угол γ_a вокруг оси Cx.

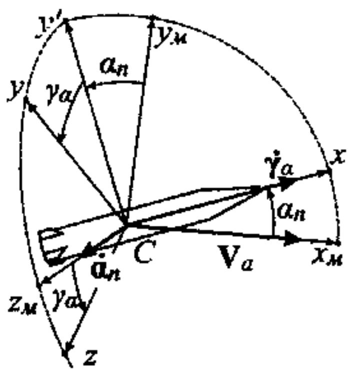


Рис. 1.6. Модифицированная скоростная система координат $Cx_мy_мz_м$

Угол θ между вектором скорости **V** и горизонтальной плоскостью $P_нx_нz_н$ в точке старта называют *углом наклона траектории*. Употребляется также *местный угол наклона траектории* $\theta_м$ (траекторный угол), измеряемый по отношению к текущей горизонтальной плоскости.

Задачи

1.2 Вектор скорости центра масс ЛА задан его компонентами в связанной СК: $\mathbf{V}_c = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}V;\ -\frac{\sqrt{3}}{4}V;\ \frac{1}{4}V\right]^T$, где V – масштабный параметр. Найти углы α и β, а также элементы матрицы перехода от скоростной к связанной СК.

1.3 В связанной СК вектор скорости представлен его компонентами: $\mathbf{V} = [v_x;\ v_y;\ v_z]^T$. Требуется найти матрицу перехода от модифицированной скоростной системы координат $Cx_мy_мz_м$ к связанной системе $Cxyz$, а также величины углов α_n и γ_a.

1.4 (выполняется с использованием ЭВМ). Составить программу расчета на ЭВМ звездного времени гринвичского меридиана S. Исходными данными являются: календарная дата (после 1 января 2000 г.) и t – всемирное время заданной даты. Алгоритм расчета следующий:

1) Переход от календарной дате к юлианской дате JD (отсчитываемой от 12 ч всемирного времени UT1 на 1 января 2000 г.) выполняется по формуле

$$JD = 2\,451\,545 + 365N_0 + \left[\frac{N_0 - 1}{4}\right] + d + 0{,}5, \tag{1.14}$$

где $N_0 = GGGG - 2000$ (здесь $GGGG$ – год); [ ] – целая часть числа; d – количество полных дней, прошедших с начала текущего года до заданной даты.

2) Доля юлианского столетия от 12 ч всемирного времени 1 января 2000 г. до заданной даты:

$$T = \frac{JD - 2451545}{36525}.$$

3) Звездное время гринвичского меридиана в 0 ч всемирного времени заданной даты

$$S_0 = 6_ч41_м50.54841_с + 8\,640\,184.812866_сT + 0.093104_сT^2 - 6.2_с \cdot 10^{-6}T^3 \quad (\textit{выражено в час.мин.сек}), \quad \text{или}$$
$$S_0 = 24\,110.54841_с + 8\,640\,184.812866_сT + 0.093104_сT^2 - 6.2_с \cdot 10^{-6}T^3 \quad (\textit{выражено в сек}). \tag{1.15}$$

Из времени S_0, полученного по приведенным формулам, вычитается целое число суток (24 ч).

4) Звездное время гринвичского меридиана, соответствующее всемирному времени t заданной даты, $S = S_0 + \omega_e t$.

1.3 Силы и моменты, действующие на РН на активном участке траектории

Активным называется участок траектории, на котором РН движется под действием силы тяги работающего двигателя. Кроме силы тяги **P**, на РН действует сила притяжения Земли **G**, аэродинамическая сила $\mathbf{R}_a$, а также управляющие силы.

Рассмотрим выражения для этих сил, причем зависимости для силы притяжения, аэродинамических сил и моментов приведем в более общем виде, что требуется для последующего рассмотрения движения ЛА других типов.

Сила тяги представляет равнодействующую реактивной силы, создаваемой за счет выброса продуктов сгорания топлива через сопло, и газодинамических сил, действующих на внутренние и внешние поверхности двигателя и ракеты. Вектор силы тяги направлен по продольной оси ракеты; его модуль составит

$$P = \dot{m}w_a + S_a p_a - S_a p_h,$$

где $\dot{m}$ – массовый расход топлива за секунду (считается $\dot{m} > 0$); w_a – скорость истечения продуктов сгорания; S_a – площадь выходного сечения сопла; p_a – давление газового потока на срезе сопла; p_h – наружное давление на высоте h. Наибольшая тяга при постоянном расходе топлива развивается в вакууме (пустотная тяга):

$$P_п = \dot{m}w_a + S_a p_a;$$

наименьшая – вблизи поверхности Земли, где $p_h = p_0$ (земная тяга):

$$P_0 = P_п - S_a p_0.$$

Тогда на некоторой высоте h

$$P(h) = P_п - S_a p_h = P_п(1 - \bar{p}\bar{\gamma}), \tag{1.16}$$

где $\bar{p} = \frac{p_h}{p_0}$ – относительное давление воздуха; $\bar{\gamma} = \frac{S_a p_0}{P_п}$ – коэффициент высотности двигателя.

Важной характеристикой эффективности двигателя является величина *удельного импульса* – отношения тяги двигателя к массовому секундному расходу топлива:

$$I_{уд}(h) = \frac{P(h)}{\dot m} \qquad (1.17)$$

Значения удельного импульса в пустоте $I_{уд.п}$ составляют:

– для жидкостных ракетных двигателей	– 3 000 ÷ 4 600 м/с;
– для ракетных двигателей на твердом топливе	– 2 500 ÷ 3 000 м/с;
– для ядерных ракетных двигателей	– 8 000 ÷ 25 000 м/с;
– для ионных ракетных двигателей	– 50 000 ÷ 250 000 м/с.

Сила притяжения Земли $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, где m – масса ЛА, $\mathbf{g}$ – вектор ускорения силы притяжения, зависящий от принятой модели фигуры Земли и соответствующей ей модели гравитационного поля. В простейшем случае рассматривается модель плоскопараллельного гравитационного поля. В этом случае вектор ускорения силы притяжения принимается постоянным по величине и направлению, причем направление вектора $\mathbf{g}$ противоположно направлению внешней нормали к плоской поверхности Земли, а его модуль $g = 9{,}81$ м/с^2.

В следующем приближении Землю представляют в виде равного ей по объему шара радиусом $R_З = 6\,371{,}11$ км. Такой модели фигуры Земли соответствует *центральное (ньютоновское)* гравитационное поле. Вектор $\mathbf{g}$ в этом случае вычисляется по формуле

$$\mathbf{g} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -g\,\mathbf{e}_r. \qquad (1.18)$$

Здесь гравитационный параметр $\mu = fM_З = 3{,}986 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2 – произведение гравитационной постоянной на массу Земли; r – модуль радиус-вектора ЛА; $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, направленный по радиус-вектору ЛА.

Потенциал силы притяжения, отнесенный к единице массы, равен работе, совершаемой силой притяжения при удалении единичной массы на бесконечное расстояние от Земли

$$\Pi = -\int_r^{\infty}\frac{\mu}{r^2}dr = \frac{\mu}{r}\bigg|_r^{\infty} = -\frac{\mu}{r}. \qquad (1.19)$$

Модель центрального поля используется при предварительных баллистических расчетах движения ЛА вблизи Земли, а также при расчетах траекторий КА, находящихся на больших высотах.

Более точной является модель Земли в форме эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса вокруг малой оси, причем малая ось совпадает с осью вращения Земли. Обычно используют следующие параметры общего земного эллипсоида (например, в системе координат WGS-84 [21]):

– большая полуось (экваториальный радиус) $a = 6\,378\,137$ м;

– сжатие $\alpha = \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{1}{298{,}257563}$, где b – малая полуось.

Декартовы координаты ЛА X, Y, Z в геоцентрической СК $Ox_гy_гz_г$ связаны

с геодезическими координатами: $\varphi_г$ – широтой, $\lambda_г$ – долготой, H – высотой над уровнем эллипсоида, описывающего поверхность Земли, соотношениями

$$\begin{aligned} X &= (N+H)\cos\varphi_г\cos\lambda_г; \\ Y &= (N+H)\cos\varphi_г\sin\lambda_г; \\ Z &= [(1-e^2)N+H]\sin\varphi_г, \end{aligned} \qquad (1.20)$$

где

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_г}}, \quad e = 2\alpha - \alpha^2. \qquad (1.21)$$

Вектор $\mathbf{g}$ в этом случае определяют его неортогональными составляющими по радиальному направлению (g_r) и по оси вращения Земли (g_ω); эти составляющие являются функциями геоцентрической широты φ:

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\mu_0}{r^2} - \frac{3\mu_2}{2r^4}(1-5\sin^2\varphi) - \frac{5\mu_4}{8r^6}(63\sin^4\varphi - 42\sin^2\varphi + 3), \\ g_\omega &= \frac{3\mu_2}{r^4}\sin\varphi - \frac{5\mu_4}{2r^6}(3\sin\varphi - 7\sin^3\varphi). \end{aligned} \qquad (1.22)$$

Здесь $\mu_0 = 3{,}9860243 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2; $\mu_2 = -1{,}7562911 \cdot 10^{25}$ м^5/с^2; $\mu_4 = 1{,}5482768 \cdot 10^{36}$ м^7/с^2 – гравитационные параметры общего земного эллипсоида [9].

Потенциал силы притяжения, отнесенный к единице массы ЛА, записывается в виде

$$\Pi = -\frac{\mu_0}{r} - \frac{\mu_2}{r^3}P_2 - \frac{\mu_4}{r^5}P_4, \qquad (1.23)$$

где $P_2 = 0{,}5\,(3\sin^2\varphi - 1)$; $P_4 = 0{,}125\,(35\sin^4\varphi - 30\sin^2\varphi + 3)$.

Если движение рассматривается в относительной СК, связанной с вращающейся Землей, то вместо силы притяжения $\mathbf{G}$ берут силу тяжести $\mathbf{G}'$, представляющую равнодействующую силы притяжения и силы инерции переносного движения от суточного вращения Земли. Проекции ускорения силы тяжести на радиальное направление (g'_r) и на ось вращения Земли (g'_ω) определяются по формулам

$$g'_r = g_r + \omega_e^2 r; \quad g'_\omega = g_\omega - \omega_e^2 r\sin\varphi, \qquad (1.24)$$

где ω_e – скорость вращения Земли.

Вектор ускорения Кориолиса, учитываемый при расчетах в относительной СК, задается выражением

$$\mathbf{w}_k = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{V}_{отн}), \qquad (1.25)$$

где $\mathbf{V}_{отн}$ – вектор скорости движения ЛА в относительной системе координат, а вектор скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}_e$ в геоцентрической СК представлен компонентами: $\boldsymbol{\omega}_e = [0;\ 0;\ \omega_e]^T$.

Аэродинамическая сила $\mathbf{R}_a$ представляет равнодействующую поверхностных сил, действующих на корпус ЛА со стороны набегающего потока воздуха. Точка пересечения линии действия силы $\mathbf{R}_a$ с продольной осью ЛА называется *центром давления*. Аэродинамическую силу обычно приводят к центру масс, добавляя присоединенный момент. Момент аэродинамической силы относительно центра масс называют полным аэродинамическим моментом $\mathbf{M}_a$.

Для ЛА, имеющих плоскость симметрии, вектор силы $\mathbf{R}_a$ представляют его проекциями на оси полусвязанной системы координат: X – *силой лобового сопротивления*, направленной против вектора скорости; Y – *подъемной силой*; Z – *боковой силой*. В полусвязанной СК вектор $\mathbf{R}_a$ имеет составляющие

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\rho V_a^2}{2} S \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = qS \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}, \tag{1.26}$$

где ρ – плотность воздуха на данной высоте; V_a – воздушная скорость; S – площадь миделя, т.е. характерного (например, наибольшего) поперечного сечения ЛА; $q = \frac{\rho V_a^2}{2}$ – скоростной напор набегающего потока воздуха; C_x, C_y, C_z – безразмерные коэффициенты, называемые, соответственно, коэффициентами силы лобового сопротивления, подъемной силы, боковой силы.

При расчетах значения C_x, C_y, C_z вычисляются по эмпирическим формулам или берутся из таблиц в зависимости от размеров и формы ЛА, углов атаки и скольжения, высоты полета, числа Маха и других критериев аэродинамического подобия. Число Маха – это отношение воздушной скорости ЛА к скорости звука: $M = \frac{V_a}{a_{зв}}$, где принимают $a_{зв} = 20{,}0463\sqrt{T}$ м/с, T – абсолютная температура воздуха, К.

Иногда вектор силы $\mathbf{R}_a$ представляют в проекциях на оси связанной системы координат

$$\mathbf{R}_{св} = \begin{bmatrix} -X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = qS \begin{bmatrix} -C_\tau \\ C_n \\ C_z \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

соответствующие проекции называют: X' – *продольной*, Y' – *нормальной*, Z' – *поперечной* силами. Переход от представления (1.26) к представлению (1.27) может быть выполнен при помощи матрицы перехода $\mathbf{A}_\alpha$ (1.12).

Полный аэродинамический момент $\mathbf{M}_a$ обычно раскладывают на составляющие по осям связанной системы координат. Эти составляющие M_x, M_y, M_z называют, соответственно, *моментами крена, рыскания и тангажа*, а их величины определяются соотношениями

$$\mathbf{M}_{а} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = q S l \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}, \tag{1.28}$$

где l – характерный линейный размер ЛА (например, его длина); m_x, m_y, m_z – безразмерные коэффициенты составляющих полного аэродинамического момента, которые так же, как и коэффициенты сил, зависят от условий движения и определяются по результатам экспериментов, либо численных расчетов.

Для осесимметричного ЛА вектор силы $\mathbf{R}_a$ может быть представлен его проекциями на оси полусвязанной системы координат, повернутой относительно системы координат $Cx_мy_мz_м$ на угол $\alpha_п$ (системы $Cxy'z_м$ на рис. 1.6)

$$\mathbf{R}_{а} = \begin{bmatrix} -X' \\ Y' \\ 0 \end{bmatrix} = q S \begin{bmatrix} -C_\tau \\ C_n \\ 0 \end{bmatrix},$$

причем коэффициенты C_n, C_τ зависят от значения $\alpha_п$. С учетом введенного ранее угла крена γ_a выражение составляющих силы $\mathbf{R}_a$ в связанных осях можно привести к виду

$$\mathbf{R}_{а} = \begin{bmatrix} -X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = q S \begin{bmatrix} -C_\tau \\ C_n \cos\gamma_a \\ -C_n \sin\gamma_a \end{bmatrix}. \tag{1.29}$$

Составляющие полного аэродинамического момента $\mathbf{M}_a$ по осям связанной системы координат определяются соотношениями

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{r}_д \times \mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = q S x_д \begin{bmatrix} 0 \\ C_n \sin\gamma_a \\ C_n \cos\gamma_a \end{bmatrix}, \tag{1.30}$$

где $x_д$ – расстояние от центра масс ЛА до центра давления; $x_д < 0$, если центр давления находится позади центра масс, и $x_д > 0$ в противном случае; $\mathbf{r}_д = [x_д; 0; 0]^T$.

Иногда в расчетах также учитывают возникающий вследствие вращения ЛА в атмосфере демпфирующий момент, который направлен против вращения и приводит к гашению угловой скорости.

Управляющие силы и моменты предназначены для регулирования скорости РН и угловых движений относительно осей: Cx (крен), Cy (рыскание), Cz (тангаж).

В системе управления движением РН выделяют четыре канала управления, предназначенные для формирования соответствующих управляющих воздействий, часто условно называемых отклонениями «рулей» (в действительности для управления могут также использоваться либо поворотные маршевые двигатели, либо другие органы управления). Отклонения рулей от нейтрального положения обозначают через δ_u, где u – индекс канала управления.

Обычно рассматриваются следующие каналы управления и управляющие воздействия:

– канал продольного движения, регулирующий скорость ЛА (формирует воздействие δ_x);

– канал крена (формирует δ_γ);
– канал рыскания (формирует δ_ψ);
– канал тангажа (формирует δ_ϑ).

В предположении малости отклонений рулей можно считать, что возникающие управляющие силы и моменты пропорциональны этим отклонениям. Для обозначения соответствующих коэффициентов пропорциональности C_u^δ, величины которых определяются конструктивной реализацией способа управления, используют двойные индексы: нижний индекс обозначает ось, вдоль которой направлен вектор управляющей силы (индексы x, y, z) или вектор управляющего момента (индексы γ, ψ, ϑ), а верхний показывает, что коэффициент стоит при отклонении руля δ.

Так, при ненулевом отклонении руля δ_x возникает управляющая сила, направленная вдоль связанной оси Cx:

$$X_{упр} = C_x^\delta \delta_x; \tag{1.31}$$

при отклонении руля δ_γ возникает управляющий момент, направленный относительно оси Cx:

$$M_{упр\,x} = C_\gamma^\delta \delta_\gamma; \tag{1.32}$$

при отклонении руля δ_ψ возникает управляющая сила, направленная вдоль оси Cz, и управляющий момент, направленный относительно оси Cy:

$$Z_{упр} = C_z^\delta \delta_\psi; \quad M_{упр\,y} = C_\psi^\delta \delta_\psi; \tag{1.33}$$

при отклонении руля δ_ϑ возникает управляющая сила, направленная вдоль оси Cy, и управляющий момент, направленный относительно оси Cz:

$$Y_{упр} = C_y^\delta \delta_\vartheta; \quad M_{упр\,z} = C_\vartheta^\delta \delta_\vartheta. \tag{1.34}$$

Если отклонения рулей не малы, то в формулах (1.32)-(1.34) вместо отклонения δ_u вводят $\sin\delta_u$.

1.4 Дифференциальные уравнения движения РН

Для составления уравнений движения РН будем использовать *принцип затвердевания* [20], сформулированный для РН, как тела переменного состава: уравнения движения корпуса ракеты могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела, имеющего ту же массу, если к системе внешних сил, действующих на РН, добавить реактивную силу и кориолисовы силы, возникающие вследствие движения частиц топлива относительно корпуса.

В настоящем рассмотрении реактивная сила учитывается в составе силы тяги двигателя и управляющих сил; кориолисовыми силами будем пренебрегать.

В инерциальной СК дифференциальные уравнения движения центра масс РН получаются путем проецирования на ее оси векторного уравнения

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{P} + \mathbf{R}_a + \mathbf{F}_{упр} + \mathbf{G} = \mathbf{F}_\Sigma + \mathbf{G}, \tag{1.35}$$

где $\mathbf{F}_\Sigma$, представляющая сумму силы тяги, аэродинамической силы и управляющей силы, в связанных осях с применением формул (1.29), (1.31), (1.33), (1.34) может быть записана в виде

$$\mathbf{F}_\Sigma = \begin{bmatrix} P - C_\tau qS \quad + C_x^\delta \delta_x \\ C_n qS \cos\gamma_a + C_y^\delta \delta_\vartheta \\ -C_n qS \sin\gamma_a \; + C_z^\delta \delta_\psi \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

Используя выражения проекций вектора ускорения силы притяжения, введенные по формулам (1.22), получим уравнения движения РН (1.35) в проекциях на оси абсолютной геоцентрической системы координат в виде

$$m\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{св\,га} \begin{bmatrix} P - C_\tau qS \quad + C_x^\delta \delta_x \\ C_n qS \cos\gamma_a + C_y^\delta \delta_\vartheta \\ C_n qS \sin\gamma_a \; + C_z^\delta \delta_\psi \end{bmatrix} + \frac{m g_r}{r} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + \dfrac{r}{g_r} g_\omega \end{bmatrix}, \tag{1.37}$$

где $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{V}_x;\ \dot{V}_y;\ \dot{V}_z]^T$ – вектор абсолютного ускорения; $\mathbf{A}_{св.га} = \mathbf{A}_{н\,га}(\mathbf{A}_{н\,св})^T$ – матрица перехода от связанной к абсолютной геоцентрической СК; выражения образующих ее матриц $\mathbf{A}_{н\,га}$ и $\mathbf{A}_{н\,св}$ задаются формулами (1.6) и (1.8).

Рассмотрим уравнения движения в проекциях на оси относительной геоцентрической системы координат $Ox_zy_zz_z$. При записи уравнений движения в относительной СК необходимо учитывать переносную и кориолисовую силы инерции. Тогда, вводя в уравнения вместо силы притяжения силу тяжести $\mathbf{G}'$, уравнение движения в векторной форме приведем к виду:

$$m\dot{\mathbf{V}}_{отн} = \mathbf{P} + \mathbf{R}_a + \mathbf{F}_{упр} + \mathbf{G}' - m\mathbf{w}_k, \tag{1.38}$$

где $\mathbf{V}_{отн} = [v_x;\ v_y;\ v_z]^T$ – вектор относительной скорости.

Используя проекции ускорения силы тяжести (1.24) и выражение ускорения Кориолиса (1.25), запишем уравнения движения РН в проекциях на оси геоцентрической системы координат

$$m\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{zга}^T \mathbf{A}_{св\,га} \begin{bmatrix} P - C_\tau qS \quad + C_x^\delta \delta_x \\ C_n qS \cos\gamma_a + C_y^\delta \delta_\vartheta \\ C_n qS \sin\gamma_a \; + C_z^\delta \delta_\psi \end{bmatrix} + \frac{m g_r'}{r} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + \dfrac{r g_\omega'}{g_r'} \end{bmatrix} + 2\omega_e \begin{bmatrix} -v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.39}$$

где матрица $\mathbf{A}_{zга}$ задается соотношением (1.3).

Уравнения (1.39) дополняются тремя кинематическими соотношениями для декартовых координат в геоцентрической СК:

$$\dot{x}_z = v_x; \quad \dot{y}_z = v_y; \quad \dot{z}_z = v_z. \tag{1.40}$$

Рассмотрим далее уравнения движения РН относительно центра масс. Используя принцип затвердевания и пренебрегая движением частиц топлива относительно корпуса РН, кинетический момент относительно центра масс «фиктивного твердого тела», заменяющего в уравнениях ракету, представим в виде $\mathbf{L}_c^{фт} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость РН; $\mathbf{I}$ – его тензор инерции. Известно [14], что уравнение вращательного движения твердого тела

$$\frac{d\mathbf{L}_c^{фт}}{dt} = \mathbf{M}_c,$$

где $\mathbf{M}_c$ – главный момент всех внешних сил относительно цента масс твердого тела, во вращающейся системе координат имеет вид

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{L}_c^{фт}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_c^{фт} = \mathbf{M}_c, \tag{1.41}$$

где $\dfrac{\tilde{d}}{dt}$ – производная, вычисленная во вращающейся системе. Удобно рассматривать это уравнение в связанной системе координат $Cxyz$, так как в этой системе компоненты тензора инерции РН неизменны. Из (1.41) имеем

$$\mathbf{I}\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_c. \tag{1.42}$$

Будем считать, что все центробежные моменты равны нулю, т.е. тензор $\mathbf{I}$ в связанных осях представлен матрицей компонент $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$, где I_x, I_y, I_z – моменты инерции относительно соответствующих осей системы $Cxyz$.

Из векторного уравнения (1.42) получим три скалярных уравнения для производных по времени от составляющих угловой скорости РН в связанных осях

$$\dot{\omega}_x = \frac{1}{I_x}\left(\sum M_x - (I_z - I_y)\omega_y\omega_z\right),$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{1}{I_y}\left(\sum M_y - (I_x - I_z)\omega_z\omega_x\right), \tag{1.43}$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{I_z}\left(\sum M_z - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y\right).$$

Примем предположение о том, что моменты силы тяги и силы тяжести относительно центра масс равны нулю. Тогда главный момент $\mathbf{M}_c$ будет представлять сумму моментов аэродинамических и управляющих сил; его проекции на оси связанной системы координат по (1.30), (1.32)-(1.34) составят:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{упр} = \begin{bmatrix} C_\gamma^\delta \delta_\gamma \\ x_\partial C_n q S \sin\gamma_a + C_\psi^\delta \delta_\psi \\ x_\partial C_n q S \cos\gamma_a + C_\vartheta^\delta \delta_\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.44}$$

Уравнения (1.43) дополняются тремя кинематическими соотношениями

(1.11) для углов, определяющих ориентацию РН.

Полная система дифференциальных уравнений движения РН включает шесть уравнений движения центра масс РН (1.39) и (1.40), записанных в геоцентрической СК, а также шесть уравнений движения относительно цента масс (1.43) и (1.11), записанных в связанной СК. Эта система должна быть дополнена программами $\delta_x(t)$, $\delta_\gamma(t)$, $\delta_\psi(t)$, $\delta_\vartheta(t)$ отклонения рулей, которые формируются системой управления РН с целью обеспечения заданной траектории выведения на орбиту. В результате интегрирования системы уравнений движения определяются текущие координаты РН и составляющие ее вектора скорости, а также значения углов, определяющих его пространственную ориентацию. По найденным величинам можно вычислить все требуемые параметры движения, например, высоту, дальность и составляющие скорости относительно точки старта, измерительных пунктов и других объектов – движущихся, либо расположенных на поверхности вращающейся Земли.

1.5 Уравнения плоского движения РН

Траектория движения РН на активном участке представляет собой пространственную кривую вследствие вращения Земли и действия на РН различных возмущающих факторов. Для приближенного анализа траектории примем следующие упрощающие предположения в дополнении к упрощениям, сформулированным в подразделе 1.4:

- вращение Земли не учитывается;
- Земля представляет собой шар радиуса $R_З$ с равномерно распределенной массой; поле силы тяжести является центральным;
- не учитывается боковая аэродинамическая сила, скорость ветра относительно Земли пренебрежимо мала.

При этих предположениях силы, действующие на РН, расположены в одной плоскости, а траектория активного участка РН является плоской кривой. Векторное уравнение движения центра масс РН запишем в виде

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{P} + \mathbf{G} + \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{X}_{упр} + \mathbf{Y}_{упр}, \tag{1.45}$$

где $\mathbf{P}$ – сила тяги; $\mathbf{G}$ – сила тяжести; $\mathbf{X}$ – сила лобового сопротивления; $\mathbf{Y}$ – подъемная сила; $\mathbf{X}_{упр}$, $\mathbf{Y}_{упр}$ – составляющие управляющей силы.

В этом параграфе будем использовать обозначения: $Cx_{св}y_{св}z_{св}$ – для связанной системы и $Oxyz$ – для стартовой системы координат. Введенные системы координат и силы, действующие на РН, иллюстрируются на рис. 1.7.

На участке работы первой ступени РН, проходящем в плотных слоях атмосферы, удобно рассматривать уравнение (1.45) в проекциях на оси скоростной системы координат. Для вычисления абсолютной производной вектора скорости применима формула теоретической механики

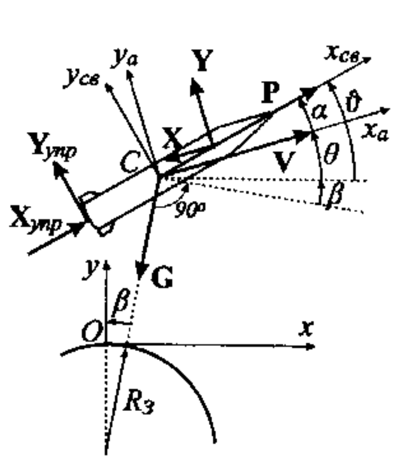


Рис. 1.7. Силы, действующие на РН

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}, \qquad (1.46)$$

где $\frac{\tilde{d}\mathbf{V}}{dt}$ – относительная производная – производная вектора скорости, вычисленная во вращающейся СК; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор скорости вращения системы координат. Проекции векторов, входящих в правую часть уравнения (1.45), на оси скоростной системы координат составят:

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{V}}{dt} = [\dot{V};\, 0;\, 0]^T;$$

$$\mathbf{V} = [V;\, 0;\, 0]^T;\quad \boldsymbol{\omega} = [0;\, 0;\, \dot{\theta}]^T.$$

Подставив последние выражения в (1.46), найдем $\dot{\mathbf{V}} = [\dot{V};\, V\dot{\theta};\, 0]^T$.

В случае плоского движения из трех углов, задающих положение РН относительно центра масс, отличен от нуля только угол тангажа ϑ; направление вектора скорости определяется траекторным углом θ (или местным траекторным углом $\theta_м$). Уравнения связи между углами имеют вид

$$\vartheta = \theta + \alpha;\qquad \theta_м = \theta + \beta, \qquad (1.47)$$

где β – центральный угол между точкой старта и центром масс РН, определяющий дальность

$$L = R_з\beta. \qquad (1.48)$$

Проецируя уравнение (1.45) на оси Cx_a, Cy_a скоростной системы координат (уравнение в проекции на ось Cz_a выполняется тождественно), получим

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= (P + X_{упр})\cos\alpha - X - G\sin\theta_м - Y_{упр}\sin\alpha; \\ mV\dot{\theta} &= (P + X_{упр})\sin\alpha + Y - G\cos\theta_м + Y_{упр}\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1.49)$$

Кинематические соотношения для определения координат x, y центра масс РН имеют вид

$$\dot{x} = V\cos\theta;\quad \dot{y} = V\sin\theta. \qquad (1.50)$$

Уравнение вращательного движения РН вокруг оси $Cz_{св}$ запишем в виде

$$I_z\ddot{\vartheta} = M_{az} + M_{упрz} = X x_д \sin\alpha + Y x_д \cos\alpha - Y_{упр}x_p, \qquad (1.51)$$

где x_p – расстояние от центра масс РН до точки приложения управляющей силы.

К этим уравнениям необходимо добавить соотношение, учитывающее изменение массы

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m}\,dt. \qquad (1.52)$$

Также имеют место следующие соотношения:

– радиус-вектор r выражается через координаты РН x и y и радиус Земли по формуле

$$r = \sqrt{(R_З + y)^2 + x^2}; \qquad (1.53)$$

– высота над поверхностью Земли:

$$h = r - R_З; \qquad (1.54)$$

– ускорение силы тяжести:

$$g = g_0\left(\frac{R_З}{R_З + h}\right)^2; \qquad (1.55)$$

– центральный угол, соответствующий дальности РН:

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{x}{R_з + y}. \qquad (1.56)$$

В некоторых случаях управляющими силами в уравнениях (1.49) можно пренебречь. Тогда система уравнений движения центра масс РН приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P\cos\alpha - X}{m} - g\sin\theta_м; \\ \dot{\theta} &= \frac{P\sin\alpha + Y}{mV} - g\cos\theta_м; \\ \dot{x} &= V\cos\theta;\quad \dot{y} = V\sin\theta; \\ m &= m_0 - \int_0^t \dot{m}\,dt. \end{aligned} \qquad (1.57)$$

На участке работы разгонного блока второй и последующих ступеней можно не учитывать аэродинамические силы; в этом случае векторное уравнение (1.45) удобнее проецировать на оси стартовой системы координат. Также пренебрегая в уравнениях движения центра масс управляющими силами, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{P_i\cos\vartheta}{m} - g\sin\beta; \\ \dot{V}_y &= \frac{P_i\sin\vartheta}{m} - g\cos\beta; \\ \dot{x} &= V_x;\quad \dot{y} = V_y; \\ m &= m_{0i} - \int_{t_{0i}}^{t_{ki}} \dot{m}_i\,dt. \end{aligned} \qquad (1.58)$$

где P_i, m_{0i} и $\dot{m}_i$ – тяга, начальная масса и секундный расход массы на участке i-й ступени.

Решение уравнений (1.58) на участке i-й ступени ведется с начальными условиями, соответствующими конечным значениям параметров движения на участке $(i\text{-}1)$-й ступени.

Управление движением РН на активном участке выполняется путем реализации системой управления заданной программы угла тангажа, которая обычно задается как функция времени: $\vartheta = \vartheta_{пр}(t)$. На программу тангажа и определяемые этой программой параметры движения РН накладываются существенные ограничения. На участке работы первой ступени: требование вертикального старта; ограничения по допустимой нормальной перегрузке, максимальному скоростному напору набегающего потока воздуха; в момент разделения ступеней: ограничения по скоростному напору и по скорости вращения РН.

Вследствие указанных ограничений управление РН практически на всем участке первой ступени обеспечивает так называемую *траекторию гравитационного разворота*, когда в процессе полета угол атаки близок к нулю $(\vartheta \approx \theta)$. На участке второй ступени (и последующих ступеней) ограничения, накладываемые при движении в атмосфере, отсутствуют. Это позволяет выбирать программу тангажа, близкую к оптимальной, которая обеспечивает наибольшую массу выводимой на орбиту полезной нагрузки. Для такой программы после выдерживания условия $\dot{\vartheta} = 0$ на участке разделения ступеней происходит вращение РН с максимально допустимой угловой скоростью, вследствие чего угол тангажа получает приращение $\Delta\vartheta$, а затем угол тангажа уменьшается по линейному закону с угловой скоростью $\dot{\vartheta}_2$. Типичная программа тангажа двухступенчатой РН приведена на рис. 1.8.

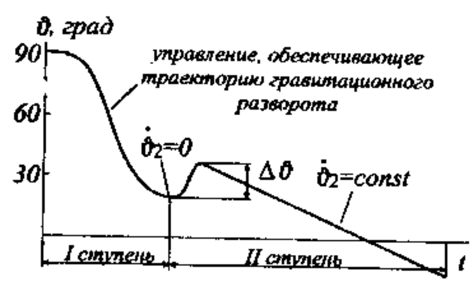


Рис. 1.8. Программа изменения угла тангажа для двухступенчатой РН

Значения $\Delta\vartheta$ и $\dot{\vartheta}_2$ выбирают таким образом, чтобы в момент окончания участка второй ступени t_{k2}, определяемый условием достижения заданной орбитальной скорости, также выполнялись условия по высоте и углу наклона траектории. Например, для круговой целевой орбиты момент t_{k2} определяется условием

$$V\big|_{t=t_{k2}} = V^* = \sqrt{\frac{\mu}{h^* + R_З}}; \tag{1.59}$$

условия по высоте и углу наклона траектории имеют вид

$$h\big|_{t=t_{k2}} = h^*; \quad \theta_м\big|_{t=t_{k2}} = 0, \tag{1.60}$$

где h^* – заданная высота орбиты.

Решение систем уравнений (1.57) и (1.58) ведется совместно с уравнением программы тангажа

$$\vartheta = \vartheta_{пр}(t). \tag{1.61}$$

Лабораторная работа

Расчет активного участка траектории ракеты-носителя

Задание:

1. Составить программу расчета активного участка траектории (АУТ) двухступенчатой РН с заданными основными проектными параметрами.
2. Для заданного варианта провести расчет АУТ.
3. Подобрать программу угла тангажа РН, обеспечивающую выведение на заданную орбиту (с допустимой погрешностью $\Delta\theta_м = 5°$; $\Delta h = 5$ км).

Исходные данные:

Основные проектные параметры РН:

– начальная масса первой ступени m_{01};

– начальная тяговооруженность первой ступени $n_{01} = \dfrac{P_{01}}{g_0 m_{01}}$;

– удельный импульс двигателя первой ступени $I_{уд.1}$;

– относительная конечная масса первой ступени $\mu_{k1} = \dfrac{m_{k1}}{m_{01}}$;

– относительная начальная масс второй ступени $\lambda = \dfrac{m_{02}}{m_{01}}$;

– начальная тяговооруженность второй ступени $n_{02} = \dfrac{P_{02}}{g_0 m_{02}}$;

– удельный импульс двигателя второй ступени $I_{уд.2}$;

– высота целевой круговой орбиты h^*.

Дополнительные параметры РН:

– коэффициент лобового сопротивления (принять $C_x = 1$);

– площадь миделя S.

Варианты:

№	n_{01}	m_{01}, т	$I_{уд.1}$, м/с	μ_{k1}	λ	n_{02}	$I_{уд.2}$, м/с	h^*, км	S, м²
1	1,4	300	4 500	0,35	0,26	1,1	3 500	200	10
2	1,5	500	4 500	0,35	0,26	1	4 500	220	12
3	1,6	100	3 500	0,3	0,22	0,9	3 500	250	8
4	1,7	150	3 500	0,27	0,2	0,8	3 500	220	8
5	1,8	600	3 300	0,27	0,2	1,0	3 600	200	12
6	1,4	300	4 500	0,35	0,26	1	3 500	220	10
7	1,5	500	4 500	0,35	0,26	0,9	4 500	270	12
8	1,6	150	3 300	0,25	0,19	0,8	3 400	250	8
9	1,7	300	3 300	0,3	0,22	0,7	3 400	200	9
10	1,8	200	4 300	0,3	0,21	1,1	3 400	230	8
11	1,4	250	3 400	0,26	0,2	0,7	4 500	270	10
12	1,3	100	3 300	0,3	0,23	0,8	3 400	220	8

13	1,6	300	4 200	0,35	0,26	0,9	3 500	220	10
14	1,7	500	4 500	0,3	0,22	1	3 500	200	12
15	1,8	400	4 200	0,3	0,22	0,9	4 300	270	12
16	1,3	350	3 000	0,35	0,26	0,7	4 600	270	10
17	1,5	200	3 300	0,3	0,22	1,1	3 600	250	8
18	1,6	150	4 200	0,37	0,28	0,7	3 700	230	9
19	1,7	100	4 300	0,25	0,19	0,9	3 500	250	9
20	1,8	150	4 500	0,3	0,22	0,6	3 200	260	10

Методические указания

Рассмотрим расчет для первой ступени. По основным проектным параметрам РН определяют:

– тягу на участке первой ступени (принимается постоянной по величине): $P_1 = P_{01} = n_{01} g_0 m_0$;

– массовый секундный расход топлива $\dot{m}_1 = \dfrac{P_1}{I_{уд.1}}$;

– продолжительность участка первой ступени

$$t_{k1} = \frac{m_{01} - m_{k1}}{\dot{m}_1} = I_{уд.1} \frac{1 - \mu_{k1}}{n_{01} g_0}.$$

Будем считать, что управляющими силами можно пренебречь; система управления обеспечивает гравитационный разворот на участке первой ступени с выполнением условия $\alpha \approx 0$ (т.е. $\theta \approx \vartheta$); изменение угла тангажа происходит в соответствии с заданной программой. Используем здесь упрощенную зависимость для программы $\vartheta_{пр}(t)$, приближенно обеспечивающей траекторию гравитационного разворота

$$\vartheta_{пр}(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & t < t_1; \\ \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \vartheta_{k1}}{(t_{k1} - t_1)^2}(t_{k1} - t)^2 + \vartheta_{k1}, & t \in [t_1,\ t_{k1}], \end{cases} \qquad (1.62)$$

где $\vartheta_{k1} = 15^\circ$, $t_1 = 8$ с. График программы $\vartheta_{пр}(t)$ приведен на рис. 1.9.

С учетом введенных предположений можно не рассматривать второе уравнение системы (1.57) и уравнение (1.51). Последнее фактически определяет управляющие моменты, потребные для реализации заданной программы тангажа. Таким образом, система уравнений движения центра масс РН примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P_1 - X}{m} - g \sin \theta_м; \\ \dot{x} &= V \cos\theta; \\ \dot{y} &= V \sin\theta; \\ m &= m_0 - \dot{m}_1 t. \end{aligned} \qquad (1.63)$$

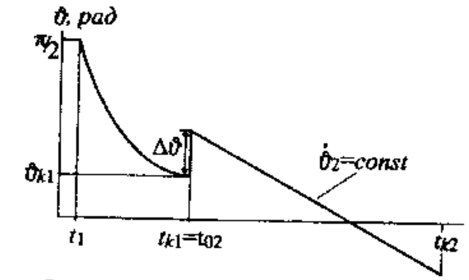


Рис.1.9. Упрощенная программа тангажа двухступенчатой РН

При этом сила лобового сопротивления определяется по (1.26). Для вычисления плотности воздуха примем экспоненциальную модель атмосферы

$$\rho = \rho_0 e^{-h/h_м}, \qquad (1.64)$$

где $\rho_0 = 1{,}225$ кг/м^2; $h_м = 7\,100$ м.

Интегрируя систему уравнений (1.63) с использованием соотношений (1.53)-(1.56), (1.48), (1.62) и (1.64) на интервале времени $t \in [0;\ t_{k1}]$, требуется найти зависимость от времени параметров: m, ϑ, $\dot{V}$, V, X, h, L, а также значения этих параметров в конце работы ступени.

Рассмотрим расчет для второй ступени. По основным проектным параметрам РН определяют:

– начальную массу ступени $m_{02} = \lambda m_0$;

– тягу на участке второй ступени $P_2 = P_{02} = n_{02} g_0 m_{02}$;

– массовый секундный расход топлива $\dot{m}_2 = \dfrac{P_2}{I_{уд.2}}$.

Пренебрегая длительностью участка разделения ступеней, положим $t_{02} = t_{k1}$. Начальные условия движения на второй ступени определяются параметрами движения в конце работы первой ступени:

$$\begin{aligned} &V_x\big|_{t=t_{02}} = V_{k1} \cos\vartheta_{k1}; \quad V_y\big|_{t=t_{02}} = V_{k1} \sin\vartheta_{k1}; \\ &x\big|_{t=t_{02}} = x_{k1}; \quad y\big|_{t=t_{02}} = y_{k1}. \end{aligned} \qquad (1.65)$$

Будем считать, что аэродинамические силы отсутствуют. Тогда система уравнений движения РН в стартовой СК запишется в виде (1.58), где $i = 2$; величина $\dot{m}_2$ полагается постоянной.

Угол тангажа здесь имеет линейную зависимость от времени (см. рис.1.9):

$$\vartheta = \vartheta_{пр}(t) = \vartheta_{k1} + \Delta\vartheta - \dot{\vartheta}_2 (t - t_{k1}); \qquad (1.66)$$

траекторный угол и местный траекторный угол определяются соотношениями

$$\theta = \operatorname{arctg}(V_y / V_x); \quad \theta_м = \theta + \beta. \qquad (1.67)$$

Интегрируя систему уравнений (1.58) с использованием соотношений (1.53)-(1.56) и (1.66)-(1.67) на интервале времени $t \in [t_{02};\ t_{k2}]$, требуется найти зависимость от времени параметров: m, ϑ, V_x, V_y, V, $\theta_м$, h, L, а также значения этих параметров в конце работы ступени. Момент t_{k2} окончания АУТ определяется условием (1.59).

Далее, параметры программы тангажа на участке второй ступени (1.66) необходимо подобрать так, чтобы в момент его окончания t_{k2} также выполнялись условия (1.60) выхода полезной нагрузки на заданную круговую орбиту. Для этого проводят повторные расчеты, подбирая подходящие значения $\Delta\vartheta$ и $\dot{\vartheta}_2$.

При этом нужно учитывать, что величина $\Delta\vartheta$ влияет, в основном, на высоту получающейся орбиты, а скорость вращения $\dot{\vartheta}_2$ – на угол наклона траектории в конце активного участка.

Ориентировочные значения параметров программы тангажа:

$$\Delta\vartheta = -0{,}1 \div 0{,}3 \text{ рад}; \quad \dot{\vartheta}_2 = 0{,}001 \div 0{,}003 \text{ рад/сек}.$$

1.6 Приближенный метод определения скорости РН

Рассмотрим здесь приближенный метод, позволяющий определить влияние проектных параметров РН на ее скорость в конце активного участка. Сделаем следующие упрощающие предположения в дополнение к упрощениям, сформулированным в подразделе 1.5: будем полагать малым центральный угол, определяющий дальность $(\beta \approx 0)$, а также известной зависимость от времени угла наклона траектории $\theta = \theta(t)$. Рассмотрим первое уравнение системы (1.57), которое представим в виде

$$dV = \left(\frac{P\cos\alpha}{m} - g\sin\theta - \frac{X}{m}\right)dt. \qquad (1.68)$$

Подставив выражение силы тяги (1.16) в (1.68), последнее перепишем в виде

$$dV = \left(\frac{P_n}{m} - \frac{P_n}{m}(1-\cos\alpha) - \frac{P_n}{m}\bar{p}\bar{\gamma}\cos\alpha - g\sin\theta - \frac{X}{m}\right)dt.$$

Проинтегрируем это уравнение на участке полета одной ступени от $t = t_0$ до $t = t_k$. Приращение скорости составит

$$\Delta V = V_k - V_0 = \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}dt - \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}(1-\cos\alpha)dt - \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}\bar{p}\bar{\gamma}\cos\alpha\, dt - \int_{t_0}^{t_k} g\sin\theta\, dt - \int_{t_0}^{t_k}\frac{X}{m}dt = J_1 - J_2 - J_3 - J_4 - J_5. \qquad (1.69)$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интегралов в (1.69). Выразив тягу через удельный импульс по (1.17) и учитывая, что $\dot{m} = -\frac{dm}{dt}$, найдем интеграл J_1:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}dt = -I_{уд.п}\int_{m_0}^{m_k}\frac{dm}{m} = I_{уд.п}\ln\frac{m_0}{m_k} = \Delta V_{ид}$$

– *идеальная скорость* – приращение скорости, которое получит РН при движении в пустоте в отсутствии внешних сил. Выражение

$$\Delta V_{ид} = I_{уд.п}\ln\frac{m_0}{m_k} \qquad (1.70)$$

называют *первой формулой Циолковского.*

Второй интеграл в (1.69) отличен от нуля, если угол атаки α не будет тождественно равен нулю на интервале $[t_0; t_k]$. Этот интеграл определяет *потери скорости на управление* $\Delta V_{упр}$, которые возникают из-за неколлинеарности векторов тяги и скорости:

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}(1-\cos\alpha)dt = (1-\cos\alpha)_{ср}\int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}dt = (1-\cos\alpha)_{ср}\Delta V_{ид} = \Delta V_{упр}, \qquad (1.71)$$

где $(1-\cos\alpha)_{ср}$ – среднеинтегральное на интервале $[t_0; t_k]$ значение.

Интеграл J_3 определяет *потери скорости из-за уменьшения тяги двигателя* $\Delta V_{дв}$ при полете в атмосфере по сравнению с тягой в пустоте

$$J_3 = \int_{t_0}^{t_k}\frac{P_n}{m}\bar{p}\bar{\gamma}\cos\alpha\, dt = \bar{\gamma}(\bar{p}\cos\alpha)_{ср}\Delta V_{ид} = \Delta V_{дв}.$$

Этот интеграл отличен от нуля на участке работы первой ступени. Так как на этом участке $\alpha \approx 0$, то получим

$$\Delta V_{дв} = \bar{\gamma}\,\bar{p}_{ср}\Delta V_{ид}, \qquad (1.72)$$

где $\bar{p}_{ср}$ – среднеинтегральное значение относительного давления.

Интеграл J_4 определяет потери скорости, вызванные притяжением Земли – *гравитационные потери* $\Delta V_{грав}$ –

$$J_4 = \int_{t_0}^{t_k} g\sin\theta\, dt = (g\sin\theta)_{ср}\Delta t = \Delta V_{грав}, \qquad (1.73)$$

которые зависят от времени работы двигателя $\Delta t = t_k - t_0$ и траекторного угла.

Интеграл J_5 определяет потери скорости на преодоление силы сопротивления атмосферы – *аэродинамические потери* $\Delta V_{аэр}$. Используя выражение силы X из (1.26), найдем

$$J_5 = \int_{t_0}^{t_k}\frac{X}{m}dt = \frac{(C_x q)_{ср}S}{P_n}\Delta V_{ид} = \Delta V_{аэр}.$$

Выразим пустотную тягу P_n и площадь миделя S через следующие проектные параметры РН: начальную тяговооруженность $n_0 = \frac{P_n}{g_0 m_0}$ и *нагрузку на мидель* $p_м = \frac{g_0 m_0}{S}$. Получим

$$\Delta V_{аэр} = \frac{(C_x q)_{ср}}{n_0 p_м}\Delta V_{ид}. \qquad (1.74)$$

Итак, приращение скорости на участке полета ступени по (1.69)-(1.74) составит

$$\Delta V = \Delta V_{ид} - \Delta V_{грав} - \Delta V_{упр} - \Delta V_{аэр} - \Delta V_{дв}. \qquad (1.75)$$

В (1.75) составляющие потерь скорости перечислены по убыванию степени влияния. Если рассмотреть участок вертикального движения в постоянном поле тяготения и учитывать только гравитационные потери, то получим следующее приращение скорости

$$\Delta V_{ид} = I_{уд.п} \ln \frac{m_0}{m_k} - g\,\Delta t \qquad (1.76)$$

– это *вторая формула Циолковского.*

Для многоступенчатой РН конечная скорость равна сумме приращений скорости на участках работы отдельных ступеней. При этом значения $\Delta V_{дв}$ и $\Delta V_{аэр}$ не равны нулю только для первой ступени, а величина $\Delta V_{упр}$ для первой ступени, напротив, равна нулю. Приведем ориентировочные значения отдельных составляющих потерь для РН среднего класса: $\Delta V_{грав}$ = 1 200 ÷ 1 800 м/с; $\Delta V_{упр}$ = 400 ÷ 600 м/с; $\Delta V_{аэр}$ = 100 ÷ 250 м/с; $\Delta V_{дв}$ = 100 ÷ 180 м/с, откуда видно, что основными являются гравитационные потери.

Из выражений (1.70)-(1.75) можно выявить качественное влияние проектных параметров РН на скорость в конце работы ступени:

1) увеличение отношения $\frac{m_0}{m_k}$ (т.е. относительной массы топлива) и увеличение $I_{уд.п}$ (совершенствование двигательной установки) приводит к увеличению идеальной скорости;

2) уменьшение времени работы двигателя Δt и траекторного угла, по крайней мере, на основном участке разгона, приводит к уменьшению гравитационных потерь;

3) уменьшение угла атаки или продолжительности участков с ненулевым углом атаки (выведение по более пологой траектории) приводит к уменьшению потерь на управление;

4) уменьшение продолжительности участков движения в плотных слоях атмосферы приводит к уменьшению $\Delta V_{дв}$ и $\Delta V_{аэр}$. К относительному уменьшению аэродинамических потерь приводит также увеличение нагрузки на мидель, связанное, как правило, с увеличением массы и средней плотности РН.

Часто приведенные требования оказываются противоречивыми. Например, увеличение начальной тяговооруженности приводит к уменьшению гравитационных потерь, но при этом увеличиваются аэродинамические потери и масса двигательной установки. Поэтому при проектировании РН важным этапом является решение задачи оптимизации основных проектных параметров по заданному критерию. Критерием оптимизации может являться максимум относительной массы полезного груза, минимум стоимости выведения на орбиту одного килограмма груза и т.д.

Задачи

1.5 При известных проектных параметрах ступени РН найти приращение

ляется решение задачи оптимизации основных проектных параметров по заданному критерию. Критерием оптимизации может являться максимум относительной массы полезного груза, минимум стоимости выведения на орбиту одного килограмма груза и т.д.

Задачи

1.5 При известных проектных параметрах ступени РН найти приращение скорости на участке работы ступени с учетом только гравитационных потерь и приближенной зависимости траекторного угла от времени, приведенной на рис. 1.10. Считать $\dot{m} = \text{const}$, $g = \text{const}$.

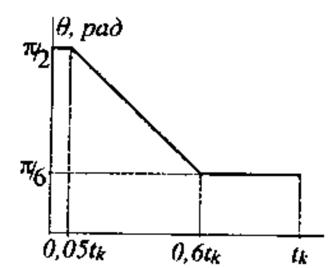


Рис.1.10. Упрощенная зависимость $\theta = \theta(t)$ к задаче 1.5

1.6 Используя условия задачи 1.5, найти производную приращения скорости на участке работы ступени по относительной конечной массе $\frac{\partial \Delta V}{\partial \mu_к}$. Принять $I_{уд.п} = 3\,300$ м/с; $\mu_к = 0{,}3$; $n_0 = 1{,}5$.

2 ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

2.1 Уравнения движения КА в центральном поле тяготения (задача двух тел)

Траектория движения КА включает активные и пассивные участки. На активном участке действует сила двигателя; на пассивном участке двигатель выключен, и движение КА происходит по инерции под действием сил гравитационного притяжения небесных тел, а также аэродинамических сил (вблизи планеты с атмосферой).

Рассмотрим движение КА относительно Земли на пассивном участке при следующих допущениях:
- поле притяжения Земли является центральным;
- влияние Солнца, Луны, других небесных тел не учитывается;
- сопротивление воздуха не учитывается;
- КА принимается за материальную точку.

Исследование движения КА при этих предположениях составляет задачу двух тел. Центр Земли в данной задаче можно считать неподвижным. Уравнение движения КА под действием центральной силы притяжения записывается в виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор КА.

В рассмотренных условиях легко получить интегралы уравнений движения. Так как сила притяжения – потенциальная, и потенциал $П$ не зависит от времени, то полная механическая энергия сохраняется. Учитывая выражение для $П$ (1.19), представим сумму кинетической и потенциальной энергии КА в виде:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = E,$$

где E – полная энергия. Разделив обе части уравнения на m, получим

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \hat{h}. \tag{2.2}$$

Выражение (2.2), называемое *интегралом энергии*, показывает, что скорость полета КА зависит только от величины радиус-вектора КА. Значение постоянной $\hat{h}$ характеризует энергетический уровень траектории.

Второй интеграл движения может быть получен из условия постоянства момента количества движения КА относительно центра Земли (так как момент силы притяжения относительно центра Земли равен нулю). Имеем векторное соотношение

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{C}. \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что движение КА происходит в плоскости, образованной радиус-вектором $\mathbf{r}$ и вектором скорости $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$ *(неизменяемой плоскости Лапласа)*; постоянный вектор $\mathbf{C}$ направлен по нормали к плоскости движения.

Проецируя (2.3) на ось, перпендикулярную плоскости движения, найдем

$$rV\cos\theta = C, \tag{2.4}$$

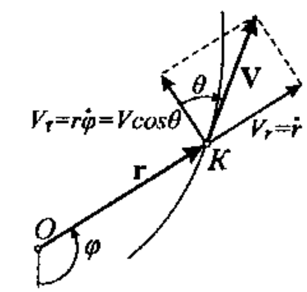


Рис.2.1. Радиальная V_r и трансверсальная V_τ составляющие скорости

где θ – местный траекторный угол, а $C = |\mathbf{C}|$.

Разложим вектор скорости на радиальную V_r и трансверсальную V_τ составляющие (рис.2.1)

$$V_r = \dot{r}; \quad V_\tau = r\dot{\varphi}, \tag{2.5}$$

где φ – полярный угол.

С другой стороны, $V_\tau = V\cos\theta$, так что вместо (2.4) можно записать

$$r^2\dot{\varphi} = C. \tag{2.6}$$

Выражения (2.4) и (2.6) называют *интегралом площадей*. Физический смысл интеграла площадей заключается в том, что *площади, ометаемые радиус-вектором КА за равные промежутки времени, равны* (*второй закон Кеплера*). Действительно, за малое время dt площадь dS, ометаемая радиус-вектором, определяется как площадь треугольника с основанием $V\,dt$ и высотой $r\cos\theta$:

$$dS = \frac{1}{2} rV\cos\theta\, dt = \frac{C}{2}dt.$$

Постоянная величина $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$ называется *секториальной скоростью* КА.

Значение постоянных $\hat{h}$ и C определяется параметрами движения в конечной точке K активного участка – скоростью V_k, радиус-вектором r_k и траекторным углом θ_k. Имеем

$$\hat{h} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_k^2}{2} - \frac{\mu}{r_k}; \tag{2.7}$$

$$C = rV\cos\theta = r_k V_k \cos\theta_k. \tag{2.8}$$

Найдем еще один интеграл уравнений движения. Векторно умножив (2.3) на (2.1), запишем

$$\mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $\mathbf{C} = \mathrm{const}$, левую часть (2.9) представим в виде

$$\mathbf{C} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{C} \times \dot{\mathbf{r}}).$$

Раскроем двойное векторное произведение в правой части (2.9) и получим

$$-\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3}\left[\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\right] =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left[r^2\dot{\mathbf{r}} - rV_r\mathbf{r}\right] = -\mu\frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = -\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Тогда равенство (2.9) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{C}\times\dot{\mathbf{r}}) = -\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Интегрируя последнее соотношение, находим

$$\mathbf{C}\times\mathbf{V} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{f}. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) называется *интегралом Лапласа*, а постоянный вектор $\mathbf{f}$ – *вектором Лапласа*. Знак минус в правой части введен для удобства дальнейшего использования интеграла (2.10).

Так как $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{V}) = 0$ и $\mathbf{C}\cdot\mathbf{r} = 0$, то из (2.10) находим $\mathbf{C}\cdot\mathbf{f} = 0$. Это означает, что вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты.

Выразим модуль вектора Лапласа через постоянные $\hat{h}$ и C. Возводя правую и левую части (2.10) в квадрат и, учитывая ортогональность векторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{V}$, получим

$$f^2 = \mu^2\frac{\mathbf{r}^2}{r^2} + C^2V^2 + \frac{2\mu}{r}(\mathbf{C}\times\mathbf{V})\cdot\mathbf{r}. \tag{2.11}$$

Применяя циклическую перестановку векторов в смешанном произведении и используя (2.3), находим

$$(\mathbf{C}\times\mathbf{V})\cdot\mathbf{r} = (\mathbf{V}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{C} = -\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = -C^2. \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.2) следует, что (2.11) может быть записано в виде

$$f^2 = \mu^2 + 2\hat{h}C^2. \tag{2.13}$$

Получим уравнение траектории КА. Умножим обе части соотношения (2.10) скалярно на $\mathbf{r}$. Получим равенство

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{V}) + \frac{\mu}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = -(\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}).$$

С использованием соотношения (2.12) перепишем это равенство в виде

$$-C^2 + \mu r = -f\,r\cos\eta, \tag{2.14}$$

где η – угол, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$ по отношению к вектору Лапласа. Угол η называется *истинной аномалией*.

Введем обозначения

$$p = \frac{C^2}{\mu};\quad e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + 2\hat{h}\frac{C^2}{\mu^2}} \tag{2.15}$$

и из (2.14) получим уравнение траектории движения в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\eta}. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) представляет математическое выражение *первого закона Кеплера*, который применительно к рассматриваемой задаче формулируется в виде: *траектория движения КА является плоской кривой второго порядка – конического сечения (окружность, эллипс, парабола, гипербола), один из фокусов которой совпадает с центром Земли.* В (2.16) p – *фокальный параметр*; e – *эксцентриситет*.

Величины p и e являются константами траектории; их значения определяются параметрами движения V_k, r_k и θ_k. Введем относительную скорость

$$\nu = \frac{V^2 r}{\mu}. \tag{2.17}$$

Для фокального параметра имеем по (2.15) и (2.8)

$$p = \frac{V_k^2 r_k^2\cos^2\theta_k}{\mu} = r_k\nu_k\cos^2\theta_k.$$

Для эксцентриситета из (2.15), (2.8) и (2.7) находим:

$$e = \sqrt{1 + \frac{V_k^2C^2}{\mu^2} - \frac{2C^2}{\mu r_k}} = \sqrt{1 + \frac{V_k^4 r_k^2\cos^2\theta_k}{\mu^2} - \frac{2V_k^2 r_k\cos^2\theta_k}{\mu}} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\nu_k\cos^2\theta_k + \nu_k^2\cos^2\theta_k}. \tag{2.18}$$

Из (2.6) с учетом того, что $\eta = \varphi + \text{const}$, и (2.15) следует, что скорость изменения истинной аномалии

$$\eta = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \tag{2.19}$$

2.2 Классификация невозмущенных траекторий КА

Фокальный параметр p определяет линейные размеры, масштаб траектории. Как следует из (2.16), величина p равна величине радиус-вектора КА при $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Точка траектории, соответствующая минимальному радиусу, которую в общем случае называют *перицентром*, для различных небесных тел имеет специальные названия. Для Земли – *перигей*, для Луны – *периселений*, для Солнца – *перигелий*. Из (2.16) видно, что наименьший радиус соответствует точке траектории, в которой $\eta = 0$. Отсюда следует, что вектор Лапласа направлен из притягивающего центра в сторону перицентра траектории. Найдем из (2.16) радиус перицентра r_π:

$$r_\pi = \frac{p}{1 + e}. \tag{2.20}$$

Если существует точка траектории, соответствующая максимальному радиусу, то в общем случае ее называют *апоцентром*. Для Земли это *апогей*, для

Луны – *апоселений*, для Солнца – *афелий*. Радиус апоцентра r_a (при $\eta = \pi$) вычисляется по формуле

$$r_a = \frac{p}{1-e}. \qquad (2.21)$$

Эксцентриситет траектории e определяет ее форму. Из уравнения траектории (2.16) следует возможность существования четырех видов траектории движения в центральном поле тяготения: *круговой, эллиптической, параболической, гиперболической*. Из интеграла энергии (2.2) следует, что в зависимости от знака $\hat{h}$ реализуются следующие случаи:

1) При $\hat{h} < 0$ удаление КА от притягивающего центра не может превзойти величину $\frac{\mu}{|\hat{h}|}$; движение происходит в ограниченной части пространства по замкнутой траектории (эллиптической или круговой орбите) с эксцентриситетом $e < 1$ согласно (2.15).

2) При $\hat{h} > 0$ траектория является гиперболической с эксцентриситетом $e > 1$; при неограниченном удалении КА от притягивающего центра $(r \to \infty)$ величина скорости стремится к своему предельному значению $V_\infty = \sqrt{2\hat{h}}$. Величину V_∞ называют *гиперболическим избытком скорости*.

3) При $\hat{h} = 0$ гиперболический избыток скорости $V_\infty = 0$. Такой предельный случай соответствует параболической траектории с эксцентриситетом $e = 1$.

Вырожденный случай, соответствующий вертикальному подъему КА в центральном поле тяготения (прямолинейная траектория) не представляет практического интереса и далее не изучается.

Рассмотрим траектории движения КА всех возможных классов.

Круговая траектория. Из (2.18) следует, что $e = 0$ возможно лишь при выполнении условий: $\theta_k = 0$ и $v_k = 1$, т.е. вектор скорости $\mathbf{V}_k$ в начальной точке пассивного участка должен быть направлен по касательной к линии местного горизонта. При этом величина скорости V постоянна; из (2.17) найдем

$$V = V_{кр}(r) = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \qquad (2.22)$$

Круговая скорость у поверхности Земли называется первой космической скоростью; ее величина составит

$$V_I = V_{кр}(R_З) = \sqrt{\frac{3{,}986 \cdot 10^{14}}{6371 \cdot 10^3}} = 7\,910\ \text{м/с}.$$

Круговая орбита на высоте $h_{кр} = 0$ невозможна из-за наличия аэродинамического торможения в атмосфере. Для орбиты на высоте $h_{кр} = 200$ км круговая скорость $V_{кр} = 7\,702$ м/с.

Параболическая траектория. Из (2.15) следует, что $e = 1$ будет при условии $\hat{h} = 0$ независимо от направления вектора скорости, определяемого углом θ_k. Из (2.2) находим величину скорости, необходимой для движения по параболической траектории:

$$V_{пар}(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V_{кр}(r). \qquad (2.23)$$

Параболическая скорость $V_{пар}$ называется также скоростью освобождения или скоростью убегания из поля тяжести планеты. Скорость убегания из поля тяжести Земли вблизи ее поверхности называется второй космической скоростью; величина этой скорости $V_{II} = V_{пар}(R_З) = 11\,180$ м/с.

Эллиптическая траектория. Для нее $0 \le e < 1$. Из (2.18) следует, что это возможно при $0 < v_k < 2$. Геометрические параметры эллиптической орбиты иллюстрируются на рис. 2.2, где притягивающий центр находится в точке O. Точки пересечения фокальной линии OF с орбитой называют *апсидами*, а саму ось – *линией апсид*. *Большая полуось орбиты* определяет среднее расстояние от притягивающего центра до КА

$$a = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2}. \qquad (2.24)$$

Малую полуось b можно вычислить из соотношений

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}; \qquad (2.25)$$

величину $c = O_1F = O_1O$ называют *линейным эксцентриситетом*.

Из набора параметров p, e, a, b, c, r_α, r_π любые два параметра однозначно определяют геометрию орбиты. Например, используя (2.20) и (2.21), выразим p и e через r_α и r_π:

$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}; \qquad (2.26)$$

$$p = \frac{2r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}. \qquad (2.27)$$

Линейный эксцентриситет, как следует из (2.26), связан с e соотношением

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (2.28)$$

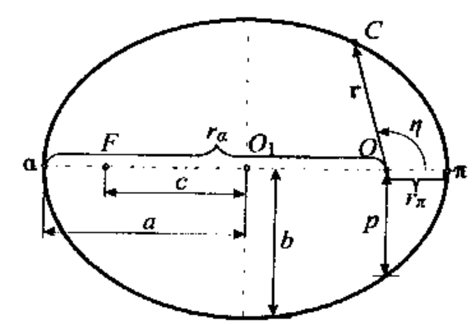


Рис.2.2. Геометрические параметры эллиптической орбиты

Если $r_\pi < R_З$, то траектория будет пересекаться с поверхностью Земли. Такие траектории называются *баллистическими*. Реализация космических траекторий *искусственных спутников Земли* (ИСЗ) возможна, если $r_\pi > R_З + h_a$, где h_a – высота верхней границы атмосферы.

Круговая орбита является частным случаем эллиптической при $e = 0$.

Гиперболическая траектория. Для нее $e > 1$ и $\hat{h} > 0$. Движение КА происходит по той ветви гиперболы, в фокусе которой находится притягивающий центр (рис.2.3).

Из интеграла энергии (2.2) для гиперболической траектории имеем

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = V_\infty^2, \qquad (2.29)$$

откуда с учетом (2.23) получаем

$$V^2(r) = V_{пар}^2(r) + V_\infty^2, \qquad (2.30)$$

т.е. квадрат скорости равен сумме квадратов местной параболической скорости и гиперболического избытка скорости.

Рассмотрим основные геометрические соотношения для гиперболической траектории. Радиусы перицентра $(O\pi)$ и формального апоцентра $(O\alpha)$ вычисляются по формулам

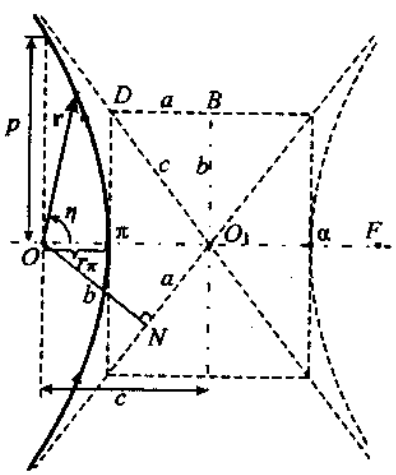


Рис.2.3. Геометрические параметры гиперболической траектории

$$r_\pi = \frac{p}{1+e}; \quad r_\alpha = \frac{p}{e-1}. \qquad (2.31)$$

При этом

$$r_\alpha - r_\pi = \frac{2p}{e^2-1}; \qquad r_\alpha - r_\pi = 2a,$$

откуда

$$a = \frac{p}{e^2-1}. \qquad (2.32)$$

Тогда радиусы перицентра и формального апоцентра выражаются формулами:

$$r_\pi = a(e-1); \quad r_\alpha = a(1+e). \qquad (2.33)$$

Как известно, эксцентриситет гиперболы определяется соотношением

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad (2.34)$$

откуда и из соотношения (2.32) следует

$$p = a(e^2-1) = \frac{b^2}{a}. \qquad (2.35)$$

Расстояние ON от притягивающего центра до направления скорости V_∞ называется прицельной дальностью. Как следует из (2.3), постоянная интеграла площадей может быть найдена по формуле $C = |ON|V_\infty$, что позволяет найти параметры движения вблизи притягивающего центра с использованием интегралов движения (2.2) и (2.4).

Используя (2.33) и (2.34), найдем $OO_1 = r_\pi + a = ae = c$. Следовательно, треугольник OO_1N равен треугольнику $DO_1\pi$ и $\cos\angle DO_1O = \frac{1}{e}$, а $ON = b$ и $O_1N = a$.

Задачи

2.1 Известен радиус апоцентра траектории $r_\alpha = 7\,972$ км и скорость КА в апоцентре $V_\alpha = 4\,763$ м/с. Определить скорость V_k и траекторный угол θ_k КА в точке K, расположенной на высоте $h_\kappa = 429$ км.

2.2 Известны параметры траектории в точке K: $r_K = 6\,800$ км; $\theta_k = 7^\circ$, а также фокальный параметр $p = 8\,020$ км. Найти наибольшее и наименьшее на траектории значение скорости КА.

2.3 Известны радиус апоцентра траектории $r_\alpha = 7\,200$ км и скорость КА в апоцентре $V_\alpha = 7\,190$ м/с. Определить, является ли данная траектория космической траекторией ИСЗ?

2.4 Известны скорости КА в апоцентре $V_\alpha = 6\,000$ м/с и перицентре $V_\pi = 8\,000$ м/с. Определить радиусы апоцентра и перицентра орбиты.

2.5 Известны параметры траектории разгонного блока первой ступени в точке отделения: высота $h_\kappa = 59$ км, скорость $V_\pi = 2\,300$ м/с, местный траекторный угол $\theta_k = 20^\circ$. Определить дальность эллиптического участка траектории разгонного блока от точки отделения до точки входа в плотные слои атмосферы. Принять высоту точки входа $h_c = 59$ км.

2.6 Известны прицельная дальность d и гиперболический избыток скорости V_∞ КА. Определить параметры траектории a, p, e. Найти также радиус перицентра и скорость КА в перицентре гиперболической траектории.

2.7 Эффективным радиусом планеты $r_{эф}$ называется такое значение прицельной дальности, при котором радиус перицентра гиперболической траектории КА равен радиусу планеты. Выразить эффективный радиус Земли через параметры Земли $R_З$, $\mu_З$ и гиперболический избыток скорости V_∞ КА.

2.3 Орбитальное невозмущенное движение КА. Элементы орбиты

Рассмотрим подробнее движение КА по эллиптической траектории под действием центрального поля тяготения Земли. Такое движение называется невозмущенным орбитальным. Для определения положения КА в пространстве можно использовать любую совокупность из 6 независимых параметров движения и текущее время. Например, задать 3 координаты и 3 составляющие скорости в некоторый момент времени. Однако эти величины не позволяют наглядно охарактеризовать траекторию, в связи с чем используется система, заимствованная из астрономии, включающая следующие элементы траектории (орбиты):

– долгота восходящего узла Ω;
– наклонение орбиты i;

– аргумент перицентра ω;
– фокальный параметр p;
– эксцентриситет e;
– время прохождения КА через перицентр t_π.

Плоскость движения фиксируется с помощью долготы восходящего узла Ω и наклонения орбиты i (рис. 2.4).

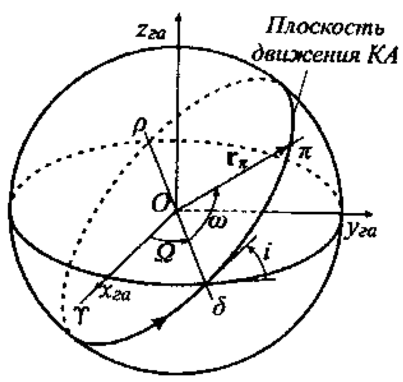


Рис. 2.4. Параметры орбиты в пространстве

Долгота Ω $(0 \le \Omega < 2\pi)$ – угол, отсчитываемый в экваториальной плоскости от направления на точку весеннего равноденствия Υ до восходящего узла δ линии узлов $\delta\rho$, то есть линии пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора. Восходящий узел δ орбиты – точка, в которой КА переходит из южного полушария в северное; противоположная точка линии узлов ρ – нисходящий узел. Наклонение орбиты i $(0 \le i \le \pi)$ – двугранный угол между плоскостью орбиты и плоскостью экватора, отсчитываемый от плоскости экватора против хода часовой стрелки для наблюдателя, находящегося в точке восходящего узла. При $i = 0$ и $i = \pi$ орбита является экваториальной. При $i = \pi/2$ орбита расположена в плоскости меридиана и называется полярной. При $i < \pi/2$ орбита называется прямой, а при $i > \pi/2$ – обратной.

Аргумент перицентра ω – угловое расстояние перицентра от восходящего узла, отсчитываемое в плоскости орбиты в направлении движения. Аргумент перицентра $(0 \le \omega < 2\pi)$ задает положение перицентра в плоскости орбиты.

Следующие два элемента – p и e – определяют, соответственно, линейные размеры и форму орбиты. Иногда вместо них используют радиусы перицентра и апоцентра. В этом случае величины e, p, a выражаются по формулам (2.26)-(2.27) и (2.24). При использовании в качестве основных параметров большой полуоси и эксцентриситета орбиты находим:

$$p = a\left(1 - e^2\right), \tag{2.36}$$

$$r_\pi = a(1-e); \quad r_\alpha = a(1+e). \tag{2.37}$$

Элементы орбиты p и e определяют также и вектор скорости во всех точках орбиты. Найдем скорости КА в перицентре и апоцентре. Учитывая, что в этих точках траектории скорость направлена в плоскости местного горизонта, т.е. $\theta_\pi = \theta_\alpha = 0$, из интегралов движения (2.7) и (2.8) имеем

$$\frac{V_\alpha^2}{2} - \frac{\mu}{r_\alpha} = \frac{V_\pi^2}{2} - \frac{\mu}{r_\pi}; \quad r_\alpha V_\alpha = r_\pi V_\pi,$$

откуда несложно найти

$$V_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{r_\alpha}}\sqrt{\frac{2r_\pi}{r_\pi + r_\alpha}}; \quad V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{r_\pi}}\sqrt{\frac{2r_\alpha}{r_\pi + r_\alpha}}, \tag{2.38}$$

или, с учетом (2.22),

$$V_\alpha = V_{кр}(r_\alpha)\sqrt{\frac{2r_\pi}{r_\pi + r_\alpha}}; \qquad V_\pi = V_{кр}(r_\pi)\sqrt{\frac{2r_\alpha}{r_\pi + r_\alpha}}. \tag{2.39}$$

Видно, что в перицентре траектории скорость – максимальная, а в апоцентре – минимальная. Из (2.36)-(2.38) следуют также соотношения

$$V_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1-e); \quad V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e). \tag{2.40}$$

Таким образом, параметры Ω, i, ω, p, e полностью задают траекторию КА в пространстве.

Далее, установим закон движения КА по орбите. Из интеграла площадей (2.6), уравнения траектории (2.16) и соотношений (2.15), (2.36) найдем

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{p^2}(1+e\cos\eta)^2 = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(1+e\cos\eta)^2 = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\eta)^2$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем неявную зависимость $\eta = \eta(t)$

$$\int_0^\eta \frac{d\eta}{(1+e\cos\eta)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}(1-e^2)^{3/2}}(t - t_\pi), \tag{2.41}$$

которая позволяет связать положение КА на орбите в текущий момент времени со временем прохождения КА через перицентр t_π.

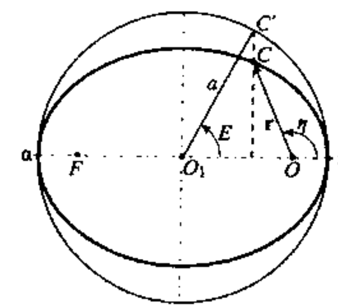


Рис. 2.5. Связь между эксцентрической и истинной аномалиями

Для решения уравнения (2.41) удобно вместо переменной η ввести новую переменную E, называемую *эксцентрической аномалией*. Геометрическая связь между эксцентрической и истинной аномалиями иллюстрируется на рис. 2.5. Здесь через точку C (текущее положение КА) проведен перпендикуляр к линии OF до пересечения в точке C' с окружностью, построенной на большой оси орбиты как на диаметре. Угол OO_1C' и является эксцентрической аномалией.

Можно показать, что уравнение связи η и E имеет вид

$$\mathrm{tg}\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}, \tag{2.42}$$

а также имеют место соотношения

$$r = a(1 - e\cos E);$$

$$\cos\eta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}; \qquad \sin\eta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}. \tag{2.43}$$

Дифференцируя последнее соотношение (2.43), запишем

$$d\eta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\,dE. \qquad (2.44)$$

Подставив (2.44) в левую часть (2.41) и используя в преобразованиях (2.16), (2.36) и (2.43), найдем

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{(1+e\cos\eta)^2} = \int_0^{\eta} \frac{r^2 d\eta}{p^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \int_0^{E} (1-e\cos E)\,dE = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}(E - e\sin E).$$

Окончательно выражение (2.41) приводится к виду

$$t - t_\pi = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}(E - e\sin E). \qquad (2.45)$$

Уравнение (2.45), связывающее время движения от перицентра до рассматриваемой точки $(t - t_\pi)$ с положением этой точки на орбите, называется *уравнением Кеплера*.

Если требуется определить время перелета КА по эллиптической траектории между двумя точками, истинные аномалии которых η_1 и η_2 известны, то по формуле (2.42) можно определить их эксцентрические аномалии E_1 и E_2, а затем, используя (2.45), вычислить длительность перелета

$$t_2 - t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left[E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)\right]. \qquad (2.46)$$

Найдем период T обращения КА. Из (2.46), учитывая, что $t_2 - t_1 = T$, $E_2 - E_1 = 2\pi$, $\sin E_2 - \sin E_1 = 0$, находим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{r_\alpha + r_\pi}{2}\right)^{3/2}. \qquad (2.47)$$

Пусть T_1 и T_2 – периоды обращения двух КА; a_1 и a_2 – большие полуоси соответствующих эллиптических орбит. Тогда из (2.47) следует

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Третий закон Кеплера можно сформулировать следующим образом: *квадраты периодов обращения двух КА относительно одного притягивающего центра пропорциональны кубам их средних расстояний до притягивающего центра.*

В заключение заметим, что при заданных элементах орбиты все параметры движения КА могут быть записаны как функции одной переменной, например, истинной аномалии. В частности, радиус-вектор, который находится по (2.16), определяет текущее значение скорости. Для траекторного угла, используя (2.5) и дифференцируя (2.16), получим следующее выражение

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\dot r}{r\dot\eta} = \frac{\frac{dr}{d\eta}\dot\eta}{r\dot\eta} = \frac{1}{r}\left(\frac{p}{1+e\cos\eta}\right)'_{\eta} = \frac{e\sin\eta}{1+e\cos\eta}. \qquad (2.48)$$

Задачи

2.8 Известны составляющие радиус-вектора КА в точке K в абсолютной геоцентрической СК и составляющие вектора скорости КА в этой точке: r_k = = [8 000 км; 0; 0]; V_k = [0; 3 938 м/с; 6 829 м/с]. Определить элементы орбиты Ω, i, ω, p, e.

2.9 Найти зависимость скорости орбитального движения КА от истинной аномалии $V = V(\eta)$. Считать заданными параметры орбиты p, e.

2.10 Показать, что радиальная V_r и трансверсальная V_τ составляющие скорости КА выражаются через элементы орбиты и истинную аномалию по формулам

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin\eta; \quad V_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos\eta). \qquad (2.49)$$

2.11 Используя геометрическое определение эксцентрической аномалии (рис. 2.5), показать справедливость соотношений (2.42) и (2.43).

2.4 Трассы искусственных спутников Земли

Текущее положение центра масс искусственного спутника Земли относительно поверхности Земли удобно определять в относительной геоцентрической системе координат $Ox_zy_zz_z$. Точка земной поверхности, из которой ИСЗ в данный момент виден в зените, называется подспутниковой. Если принята модель Земли в виде шара, то подспутниковой точкой будет точка пересечения радиуса-вектора ИСЗ со сферической поверхностью Земли. Совокупность подспутниковых точек называется трассой ИСЗ. Расчет трассы сводится к определению широты φ и долготы λ подспутниковых точек в СК $Ox_zy_zz_z$ на интересующем интервале времени.

Форма трассы определяется элементами орбиты, в первую очередь, наклонением, периодом обращения T и эксцентриситетом орбиты. Для ИСЗ с низкой круговой орбитой форма трассы близка к синусоиде, которая смещается к западу относительно трассы предыдущего витка на величину $\omega_e T$ (ω_e – скорость вращения Земли). Трасса ИСЗ, движущегося по круговой орбите с периодом T = 90 мин, $i = 60°$, приведена на рис. 2.6, *а*. Угловое смещение трассы по долготе составит 22,5° на один виток; широты подспутниковых точек принадлежат интервалу [– 60°; 60°].

Величина T называется *сидерическим периодом* обращения ИСЗ. Интервал времени между двумя последовательными прохождениями ИСЗ через плоскость одного и того же меридиана называется *синодическим периодом*. Если сидерический период сравним по величине с периодом обращения Земли

T_e = 23 час 56 мин 02 сек, то трасса значительно видоизменяется. В случае, изображенном на рис. 2.6, *б*, трасса ИСЗ с каждым витком смещается на восток на величину $\omega_e(T_e - T) \approx 105^\circ$.

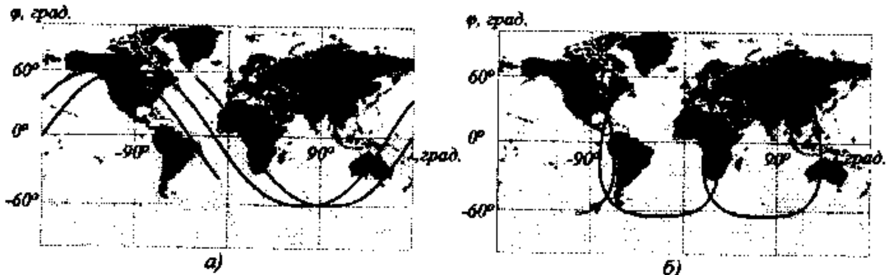


Рис. 2.6. Трассы ИСЗ, имеющих различные параметры орбиты:
а) T = 90 мин; $i = 60^\circ$; $e = 0$; *б*) T = 17 час; $i = 65^\circ$; $e = 0{,}5$; $\omega = 270^\circ$.

ИСЗ с периодом обращения T, равным или кратным T_e, называется синхронным. Синхронные ИСЗ имеют трассу в виде замкнутой кривой. Синхронный ИСЗ с периодом T_e, запущенный в плоскости экватора на круговую орбиту, называется стационарным. Радиус такой орбиты, как следует из (2.47), равен

$$r = \frac{\mu^{1/3}}{(2\pi)^{2/3}}(T_e)^{2/3} = 42\ 164 \text{ км}.$$

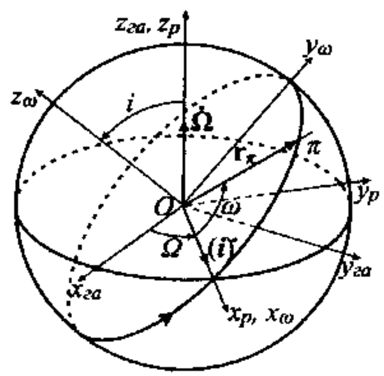


Рис. 2.7. Переход от системы координат $Ox_{га}y_{га}z_{га}$ к орбитальной неподвижной СК $Ox_\omega y_\omega z_\omega$

Для определения текущего положения ИСЗ введем дополнительно орбитальную неподвижную систему координат $Ox_\omega y_\omega z_\omega$. Начало ее располагается в центре Земли. Основная плоскость – плоскость орбиты. Опорная ось Ox_ω направлена по линии восходящего узла орбиты, ось Oy_ω располагается в плоскости орбиты перпендикулярно оси Ox_ω; ось Oz_ω дополняет систему до правой. Положение этой системы координат относительно абсолютной геоцентрической системы координат $Ox_{га}y_{га}z_{га}$ определяется параметрами орбиты – углами i и Ω. Переход от системы координат $Ox_{га}y_{га}z_{га}$ к системе координат $Ox_\omega y_\omega z_\omega$ (рис. 2.7) выполняется путем двух последовательных поворотов: сначала на угол Ω вокруг оси $Oz_{га}$ до перехода к промежуточной СК $Ox_py_pz_p$; затем – на угол i вокруг оси Ox_p. Этим поворотам соответствуют матрицы перехода

$$\mathbf{A}_{га\ p} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{p\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

Для обратного перехода – от системы $Ox_\omega y_\omega z_\omega$ к системе $Ox_{га}y_{га}z_{га}$ – используется матрица перехода

$$\mathbf{A}_{\omega га} = \mathbf{A}^T_{га\omega} = \mathbf{A}^T_{га\ p}\mathbf{A}^T_{p\omega}, \tag{2.50}$$

а для перехода от системы координат $Ox_\omega y_\omega z_\omega$ к относительной геоцентрической СК $Ox_zy_zz_z$ – матрица

$$\mathbf{A}_{\omega z} = \mathbf{A}^T_{zp}\mathbf{A}^T_{p\omega}. \tag{2.51}$$

Здесь

$$\mathbf{A}_{zp} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\delta = \omega_e S_0 + \omega_e t - \Omega$; t – время, прошедшее с момента начала наблюдения; S_0 – начальное значение местного звездного времени гринвичского меридиана.

Положение ИСЗ в плоскости $Ox_\omega y_\omega$ определяется аргументом перицентра ω и истинной аномалией η. Величина радиус-вектора ИСЗ находится по (2.16); его декартовы координаты в СК $Ox_\omega y_\omega z_\omega$ определяются соотношениями

$$x_\omega = r\cos(\omega+\eta);$$
$$y_\omega = r\sin(\omega+\eta);$$
$$z_\omega = 0.$$

Компоненты радиус-вектора ИСЗ $\mathbf{r}_z = [X,\ Y,\ Z]^T$ в системе координат $Ox_zy_zz_z$ определяются по компонентам вектора $\mathbf{r}_\omega = [x_\omega\ y_\omega\ z_\omega]^T$ с использованием матрицы (2.51): $\mathbf{r}_z = \mathbf{A}_{\omega z}\mathbf{r}_\omega$.

Выполнив преобразования, найдем

$$\begin{aligned} X &= r[\cos(\omega+\eta)\cos\delta + \sin(\omega+\eta)\cos i\sin\delta]; \\ Y &= r[-\cos(\omega+\eta)\sin\delta + \sin(\omega+\eta)\cos i\cos\delta]; \\ Z &= r\sin(\omega+\eta)\sin i. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Из (2.52) видно, что для определения положения ИСЗ на орбите можно ввести следующий параметр – *аргумент широты* ИСЗ $u = \omega + \eta$. Как и ω, он отмеряется от восходящего узла орбиты.

Задачи

2.12 Известен радиус $r_{кр}$ = 10 000 км круговой экваториальной орбиты ИСЗ. Определить синодический период обращения ИСЗ.

2.13 Известны элементы орбиты ИСЗ $\Omega = \pi/6$, $i = \pi/3$, $\omega = \pi/6$, p = 8 000 км, $e = 0{,}1$. Определить составляющие в абсолютной геоцентрической СК радиус-вектора ИСЗ в перицентре траектории и составляющие вектора скорости ИСЗ в этой точке.

2.14 Показать, что составляющие вектора скорости КА в геоцентрической СК определяются по формулам

$$V_x = V_r \frac{X}{r} - V_\tau [\sin u \cos\delta - \cos u \cos i \sin\delta];$$

$$V_y = V_r \frac{Y}{r} - V_\tau [-\cos u \sin\delta + \cos u \cos i \cos\delta]; \qquad (2.53)$$

$$V_z = V_r \frac{Z}{r} - V_\tau \cos u \sin i,$$

причем радиальная V_r и трансверсальная V_τ составляющие скорости КА выражаются по формулам (2.49), задача 2.10.

Лабораторная работа

Расчет трассы искусственного спутника Земли

Задание:

1. Составить программу расчета трассы ИСЗ с заданными элементами орбиты.
2. Провести расчет трассы ИСЗ по заданному варианту исходных данных.
3. Сделать выводы.

Исходные данные:

Интервал наблюдения равен 3 периодам обращения ИСЗ, шаг $\Delta t = 0,01 \times T$, где T – период обращения ИСЗ.

Варианты:

№	Долгота восх. узла Ω, град.	Наклонение i, град.	Аргумент перицентра ω, град.	Фокальный параметр p, км	Эксцентриситет e	Начальная истин. аномалия η_0, град	S_0, час
1	120	28	30	8 000	0,18	10	21
2	30	52	180	21 000	0,6	20	4
3	60	60	90	17 000	0,7	30	12
4	90	65	30	12 000	0,5	90	3
5	150	52	0	14 000	0,2	50	8
6	0	46	20	20 000	0,4	60	9
7	90	55	120	25 000	0,05	70	18
8	45	30	45	28 000	0,4	10	6
9	30	20	60	30 000	0,5	20	3
10	120	25	30	35 000	0,1	90	18
11	0	35	120	38 000	0,2	40	15
12	180	52	0	40 000	0,05	50	4
13	75	60	30	42 000	0,2	90	12
14	90	65	150	41 164	0,0	0	21
15	120	10	60	41 164	0,1	150	3
16	45	25	45	41 164	0,2	10	18
17	180	45	0	44 000	0,1	20	6
18	30	52	20	38 000	0,05	30	4
19	60	65	90	35 000	0,4	120	15
20	150	28	75	12 000	0,1	50	1,5

Методические указания

Сначала необходимо определить параметры орбиты: радиусы апоцентра и перицентра, большую полуось, период обращения.

Далее расчет трассы сводится к определению координат φ и λ подспутниковых точек в относительной геоцентрической СК в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$. Он выполняется в следующей последовательности. На k-м шаге:

1) Определяется эксцентрическая аномалия ИСЗ E_k путем итерационного решения уравнения (2.46), переписанного в виде

$$E_k = \frac{t_k\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} + e(\sin E_k - \sin E_0) + E_0.$$

Для этого задается начальное приближение, в качестве которого можно взять значение E_{k-1} в предыдущий момент времени (значение E_0 в момент $t_0 = 0$ определяется по (2.42)). Далее на s-й итерации:

$$E^{(s)} = \frac{t\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} + e\,(\sin E^{(s-1)} - \sin E_0) + E_0.$$

Здесь и далее индекс k опущен.

Итерации завершают при выполнении условия: $|E^{(s)} - E^{(s-1)}| < 0,001$. Заметим, что итерационный процесс всегда сходится при $e < 1$.

2) По (2.42) определяется истинная аномалия, и по (2.16) – радиус-вектор ИСЗ в момент t_k.

3) По формулам (2.52) определяются координаты ИСЗ в относительной геоцентрической СК для текущих значений r, η.

4) Определяются геоцентрические широта и долгота φ и λ подспутниковой точки на основании соотношений

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}};$$

$$\lambda = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}, & X > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}, & X < 0,\ \ Y > 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}, & X < 0,\ \ Y < 0. \end{cases} \qquad (2.54)$$

По точкам строят трассу ИСЗ.

2.5 Компланарные маневры КА

Маневром называется преднамеренное изменение параметров движения КА с помощью управляющей силы, имеющее целью перевести КА на траекторию, удовлетворяющую поставленной задаче. В зависимости от задач движения КА различают маневры:

- переход с орбиты на другую орбиту;
- сближение КА с целью, находящейся на орбите;
- переход с орбиты на межпланетную траекторию (или обратный переход);
- спуск с орбиты и посадка.

Здесь будут рассмотрены межорбитальные переходы.

Маневр называется *компланарным*, если на всем протяжении времени совершения маневра траектория КА остается в одной плоскости, и *пространственным* в противном случае.

Задача расчета маневра обычно ставится таким образом, что начальная и конечная траектории заданы, а требуется определить основные характеристики маневра, к числу которых относятся: затраты топлива на совершение маневра, время совершения маневра, точность осуществления маневра, количество включений двигательной установки. Часто требуется решить задачу оптимизации маневра, минимизирующую расход топлива; в число критериев или ограничений задачи могут быть включены также другие характеристики маневра. Оптимизация производится за счет выбора моментов включения и выключения двигательной установки, а также величины и ориентации вектора тяги.

Траекторию, связывающую начальную и конечную траектории КА, называют *переходной*. Приближенный расчет переходной траектории основан на том, что обычно длительность активных участков пренебрежимо мала по сравнению с длительностью пассивных участков. Это позволяет аппроксимировать активный участок скачкообразным (импульсным) изменением скорости и не учитывать изменение координат на активном участке.

Импульсное управление не только удобно с точки зрения упрощения расчетов, но оказывается, что именно такое управление часто является оптимальным, так как позволяет минимизировать затраты *характеристической скорости*, которая по формуле (1.70) пересчитывается в потребный запас топлива КА. Действительно, анализируя результаты, приведенные в подразделе 1.6 (выражение (1.73)), легко видеть, что в случае импульсного управления гравитационные потери скорости близки к нулю.

Далее, если сила тяги приложена по касательной к траектории КА (угол атаки близок к нулю), то потери скорости на управление также пренебрежимо малы (выражение (1.71)), и в этом случае обеспечивается наиболее эффективное расходование топлива.

При выполнении указанных условий на активных участках общие потери скорости незначительны, и импульсная скорость ΔV_k (приращение скорости КА на активном участке) близка к характеристической скорости $\Delta V_{ид}$, и может рассматриваться в качестве оценки последней величины. Заметим при этом,

разница между $\Delta V_{ид}$ и ΔV_k может быть учтена введением соответствующих поправок [20].

Переходная траектория межорбитального маневра может быть реализована с различным числом импульсов. Одноимпульсный переход возможен лишь в случае, когда орбиты имеют, по крайней мере, одну общую точку. В большинстве случаев такой маневр нерационален с точки зрения затрат топлива. Поэтому чаще используются двух- и трехимпульсные маневры.

При двухимпульсном маневре первый импульс прикладывается для перехода с начальной орбиты на траекторию, имеющую, по крайней мере, одну общую точку с конечной орбитой. Второй импульс прикладывается в общей точке для перехода КА на конечную орбиту. Каждый импульс вычисляется как векторная разность между потребной и располагаемой скоростями в данной точке.

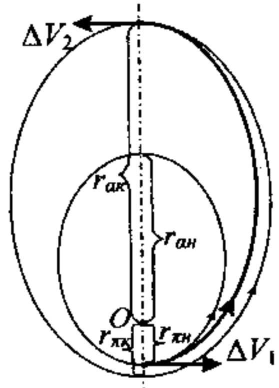


Рис. 2.8. Двухимпульсный переход между соосными эллиптическими орбитами.

Рассмотрим случай, когда начальная и конечная орбиты – эллиптические и не имеют общих точек (начальная орбита расположена внутри конечной); линии апсид орбит совпадают, т.е. $\omega_н = \omega_к$ (параметры, относящиеся к начальной и конечной орбитам, будем обозначать дополнительным индексом, соответственно, «*н*» или «*к*»). Заданы значения перицентров ($r_{пн}$, $r_{пк}$) и апоцентров ($r_{ан}$, $r_{ак}$) орбит. В рассматриваемой задаче оптимальным будет являться переход из перицентра начальной орбиты в апоцентр конечной (рис. 2.8). Переходная траектория в этом случае представляет полуэллипс, сопряженный с начальной орбитой в ее перицентре и с конечной орбитой – в ее апоцентре. Импульсы приложены по касательным к орбитам в точках сопряжения.

Величина первого импульса рассчитывается как арифметическая разность между скоростью в перицентре переходного эллипса (имеющего перицентр $r_{пн}$ и апоцентр $r_{ак}$) и начального эллипса. С использованием соотношения (2.39) запишем

$$\Delta V_1 = V_{кр}(r_{пн})\left(\sqrt{\frac{2r_{ак}}{r_{пн}+r_{ак}}} - \sqrt{\frac{2r_{ан}}{r_{пн}+r_{ан}}}\right). \qquad (2.55)$$

Второй импульс представляет арифметическую разность между скоростями в апоцентрах конечного и переходного эллипсов. По (2.39) запишем

$$\Delta V_2 = V_{кр}(r_{ак})\left(\sqrt{\frac{2r_{пк}}{r_{пк}+r_{ак}}} - \sqrt{\frac{2r_{пн}}{r_{пн}+r_{ак}}}\right). \qquad (2.56)$$

Рассмотрим частный случай перехода с одной круговой орбиты радиуса $r_н$ на другую, имеющую радиус $r_к$ ($r_н < r_к$), по-прежнему считая, что импульсы приложены по касательным к начальной и конечной орбитам. Переходная траектория представляет собой *полуэллипс Гоманна* (по имени автора, предложившего эту программу управления), перицентр которого находится на начальной орбите, а апоцентр – на конечной. Показано, что гоманновский переход энергетически выгоднее других двухимпульсных маневров.

Суммарные затраты импульсной скорости на гоманновский маневр $\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2$ вычисляются по формулам (2.55) и (2.56), где положено $r_{\pi н} = r_{ан} = r_н$ и $r_{\pi к} = r_{ак} = r_к$. Получим

$$\Delta V_\Sigma = V_{кр}(r_н)\left(\sqrt{\frac{2r_к}{r_н + r_к}} - 1\right) + V_{кр}(r_к)\left(1 - \sqrt{\frac{2r_н}{r_н + r_к}}\right). \qquad (2.57)$$

Введем понятие нормированных затрат импульсной скорости

$$\Delta u_\Sigma = \frac{\Delta V_\Sigma}{V_{кр}(r_н)}. \qquad (2.58)$$

Тогда, вводя относительный радиус $\bar{r} = \frac{r_к}{r_н}$, найдем

$$\Delta u_\Sigma = \sqrt{\frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}}}\right). \qquad (2.59)$$

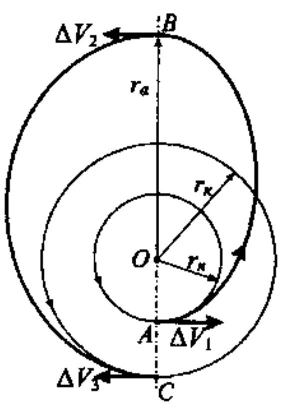


Рис. 2.9. Трехимпульсный переход между круговыми орбитами.

Исследование зависимости $\Delta u_\Sigma(\bar{r})$ показывает [20], что она имеет максимум при $\bar{r} \approx 15{,}58$, составляющий величину $\Delta u_\Sigma(15{,}58) = 0{,}536$, а при неограниченном увеличении $\bar{r}$ зависимость $\Delta u_\Sigma(\bar{r})$ стремится к предельному значению

$$\Delta u_\Sigma \xrightarrow[\bar{r}\to\infty]{} \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414.$$

Если разница между радиусами начальной и конечной круговых орбит становится большой, то более экономичным в ряде случаев является трехимпульсный маневр с уходом на переходную траекторию, пересекающую внешнюю орбиту. Рассмотрим случай, когда переходная траектория состоит из двух сопряженных полуэллипсов Гоманна (рис. 2.9). Используя соотношения (2.39), (2.22) и (2.58), несложно найти, что суммарная нормированная импульсная скорость при таком маневре составит

$$\Delta u_\Sigma = \sqrt{\frac{2\bar{r}_\alpha}{1+\bar{r}_\alpha}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}_\alpha}}\left(\sqrt{\frac{2\bar{r}}{\bar{r}+\bar{r}_\alpha}} - \sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}_\alpha}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}}\left(\sqrt{\frac{2\bar{r}_\alpha}{\bar{r}+\bar{r}_\alpha}} - 1\right), \qquad (2.60)$$

где $\bar{r}_\alpha = r_\alpha / r_н$ – отношение радиуса апоцентра переходной траектории к радиусу начальной орбиты.

Время перелета по участку эллиптической траектории вычисляется с использованием формулы (2.46), а при перелете по полуэллипсу время совершения маневра равно половине периода обращения КА (2.47) на орбите с соответствующими радиусами перицентра и апоцентра.

Задачи

2.15 Найти суммарные затраты импульсной скорости на гоманновский маневр перехода из перицентра начальной орбиты в перицентр конечной орбиты в случае, когда $\omega_н - \omega_к = \pi$ и $r_{\pi н} < r_{\pi к} < r_{ан} < r_{ак}$.

2.16 Известны скорости КА в апоцентре $V_\alpha = 4\,000$ м/с и перицентре $V_\pi = 7\,000$ м/с. Определить, как изменятся фокальный параметр и эксцентриситет орбиты, если увеличить скорость КА в перицентре на 400 м/с.

2.17 Известны радиусы перицентра и апоцентра КА $r_\pi = 6\,700$ км; $r_\alpha = 8\,000$ км. Определить, как изменятся фокальный параметр и эксцентриситет орбиты, если увеличить скорость КА в перицентре на 200 м/с.

2.18 Два ИСЗ были выведены ракетой-носителем на круговую орбиту высотой $h = 329$ км. Затем один из них при помощи двухимпульсного маневра был переведен на ту же орбиту, но с отставанием от второго на угол $\Delta\eta = \pi/2$. Найти схему маневра и затраты импульсной скорости на совершение маневра.

2.19 Космический аппарат, который движется к Земле с гиперболическим избытком скорости V_∞, требуется перевести на круговую околоземную орбиту при помощи одноимпульсного маневра. Определить высоту орбиты, обеспечивающую минимум затрат импульсной скорости на совершение маневра.

2.20 Показать, что при переходе с эллиптической орбиты на гиперболическую траекторию оптимальным является старт из перицентра орбиты, так как при этом обеспечивается максимальное значение гиперболического избытка скорости V_∞.

Лабораторная работа

Исследование траекторий двухимпульсного маневра космического аппарата

Параметры орбит и параметры разгонных импульсов:

p_1, p_2 – фокальные параметры начальной и конечной орбит;
e_1, e_2 – эксцентриситеты начальной и конечной орбит;
ω – угол между направлениями на перицентр начальной и конечной орбит;
η_1, η_2 – истинная аномалия в точках приложения 1-го и 2-го импульсов до сообщения импульсов;
η_1', η_2' – истинная аномалия в точках приложения 1-го и 2-го импульсов после сообщения импульсов;
χ_1, χ_2 – угол между вектором скорости и вектором импульса скорости в точках приложения 1-го и 2-го импульсов;
$\Delta V_1, \Delta V_2$ – величины 1-го и 2-го импульсов скорости;
$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ – суммарный импульс скорости на совершение маневра;
V_1, V_2 – значения скорости КА перед приложением 1-го и 2-го импульсов;

V_1', V_2' – значения скорости КА после приложения 1-го и 2-го импульсов;

$\Delta u_1 = \dfrac{\Delta V_1}{V_{кр}(r_1)}$ – нормированная скорость первого импульса;

t_n – время совершения маневра.

Задание:

1. Составить алгоритм и программу расчета траектории плоского двухимпульсного маневра перехода КА с одной эллиптической орбиты на другую эллиптическую орбиту.

2. Провести исследование зависимостей ΔV, t_n от параметра, для которого в варианте задания указан интервал изменения (взять 10-15 значений), и проанализировать полученные результаты. В отчете привести основные параметры, характеризующие положение и скорость КА в точках приложения импульсов, а также параметры импульсов скорости (величина, направление).

Варианты:

№	p_1, км	e_1	p_2, км	e_2	ω, рад.	η_1, рад.	$\Delta\bar{u}_1$	χ_1, рад.
1	7 500	0,1	9 000	0,2	0	0	0,15	[0; π/3]
2	7 000	0,05	9 000	0,1	π/6	π/6	[0; 0,2]	0
3	7 500	0,05	19 500	0,25	π/2	0	[0,1; 0,35]	0
4	7 500	0,1	16 000	0,1	π	0	[0,1; 0,3]	0
5	7 500	0	32 000	0,2	0	π/4	[0,25; 0,4]	π/12
6	7 500	0	25 000	0,2	0	-π/4	[0,2; 0,35]	π/10
7	8 000	0	10 000	0,1	0	0	0.15	[0; π/3]
8	7 500	0,1	12 500	0,3	–π/4	π/4	[0,1; 0,3]	0
9	7 500	0,1	10 000	0	0	π/6	0.07	[-π/3; π/3]
10	7 500	0,1	16 000	0,25	π	0	[0,1; 0,3]	0
11	8 000	0,1	11 000	0	0	π/4	0,1	[0; π/4]
12	8 000	0,2	11 000	0,2	[–π/4; π/4]	0	0,15	0
13	7 500	0,1	16 000	0,05	0	[0; π/2]	0,15	0
14	8 000	0,15	22 000	0,05	0	[0; π/2]	0,2	0
15	7 500	0,1	10 000	0	0	[–π/4; π/4]	0,1	π/12
16	8 000	0,15	11 000	0	0	[–π/3; 0]	0,1	π/8
17	7 500	0,1	10 500	0,1	π/6	[0; π/4]	0,1	π/12
18	8 000	0,1	15 000	0,1	π/4	[0; π/4]	0,15	0
19	7 500	0,1	16 000	0,25	[–π/4; π/4]	0	0,2	0
20	8 000	0,1	11 000	0,1	[–π/4; 0]	π	0,1	0

Методические указания

Схема маневра иллюстрируется на рис. 2.10. Траектория представляет дугу эллипса A_1A_2, от точки A_1 приложения первого импульса до точки A_2 приложения второго импульса. Расчет траектории маневра при известных параметрах эллиптических начальной и конечной орбит, координате η_1 точки A_1, а также величине и направлении 1-го импульса проводится следующим образом.

1) По (2.20) находят радиус перицентра начальной орбиты $r_{\pi 1}$; по (2.38) – скорость в перицентре $V_{\pi 1}$. Далее находят радиус-вектор r_1, величину V_1 и угол наклона θ_1 вектора скорости в точке приложения 1-го импульса. Используя формулы (2.16), (2.7), (2.48), получаем

$$r_1 = \frac{p_1}{1+e_1\cos\eta_1};\quad V_1 = \sqrt{V_{\pi 1}^2 - \frac{2\mu}{r_{\pi 1}} + \frac{2\mu}{r_1}};\quad \theta_1 = \mathrm{arctg}\frac{e\sin\eta_1}{1+e\cos\eta_1}.$$

2) Находят вектор скорости (V_1', θ_1') после приложения 1-го импульса:

$$V_1' = \sqrt{V_1^2 + \Delta V_1^2 + 2V_1\Delta V_1\cos\chi_1};\quad \Delta\theta_1 = \arcsin\frac{\Delta V_1\sin\chi_1}{V_1'};\quad \theta_1' = \theta_1 + \Delta\theta_1.$$

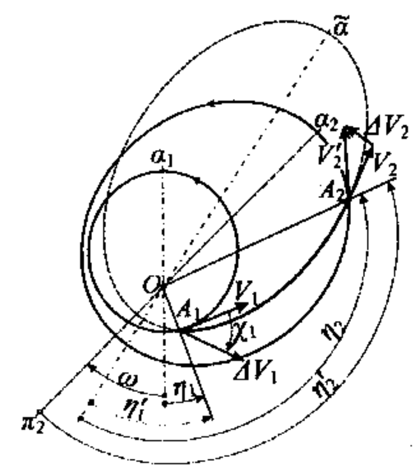


Рис.2.10. Схема двухимпульсного перехода между эллиптическими орбитами

3) Находят параметры переходной орбиты (отмечены значком «~»). Из соотношений (2.7), (2.8), (2.15) получаем

$$\tilde{h} = \frac{V_1'^2}{2} - \frac{\mu}{r_1};\quad \tilde{C} = V_1' r_1\cos\theta_1';$$

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{C}^2}{\mu};\quad \tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{\tilde{C}^2}{\mu^2}2\tilde{h}},$$

а также из (2.16) – значение истинной аномалии КА после приложения 1-го импульса в его движении по переходной орбите:

$$\eta_1' = \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{\tilde{e}}\left(\dfrac{\tilde{p}}{r_1} - 1\right) & \theta_1' \ge 0 \\ 2\pi - \arccos\dfrac{1}{\tilde{e}}\left(\dfrac{\tilde{p}}{r_1} - 1\right) & \theta_1' < 0. \end{cases}$$

Заметим, что угол между направлениями на перицентры начальной и переходной траекторий составит величину $\Delta\eta = \eta_1' - \eta_1$.

4) Далее определяют истинную аномалию КА в точке A_2. Эта точка находится из условия пересечения переходной и конечной орбит; для нее имеем соотношение:

$$r_2 = \frac{p_2}{1+e_2\cos\eta_2'} = \frac{\tilde{p}}{1+\tilde{e}\cos\eta_2}, \tag{2.61}$$

причем $\eta_2' = \eta_2 + \alpha$, где $\alpha = \omega - \Delta\eta$.

Введем обозначения

$$a = \tilde{p} e_2 \sin\alpha;$$

$$F = \frac{\tilde{p} - p_2}{\sqrt{(\tilde{p}e_2)^2 - 2p_2\tilde{p}e_2\tilde{e}\cos\alpha + (p_2\tilde{e})^2}}; \qquad (2.62)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{p_2\tilde{e} - \tilde{p}e_2\cos\alpha}{a}.$$

Тогда уравнение (2.61) может быть приведено к виду

$$\begin{cases} \sin(\eta_2 + \varphi) = F, & a > 0; \\ \sin(\eta_2 + \varphi) = -F, & a < 0. \end{cases} \qquad (2.63)$$

Если $|F| > 1$, то уравнение (2.63) не имеет решений – переходная и конечная орбиты не пересекаются. Необходимо изменить параметры 1-го импульса скорости и повторить расчет.

Если $|F| < 1$, то уравнение (2.63) имеет следующие пары решений:

а) при $a > 0$:

$$\eta_2 = \left[\begin{array}{l} \arcsin F - \varphi; \\ \pi - \arcsin F - \varphi; \end{array}\right.$$

б) при $a < 0$:

$$\eta_2 = \left[\begin{array}{l} -\arcsin F - \varphi; \\ -\pi + \arcsin F - \varphi. \end{array}\right.$$

В этом случае переходная и конечная орбиты пересекаются в двух точках. Выбирается корень, более подходящий по условиям задачи (для этого заранее определяют область допустимых корней и формулируют условия, которым должен отвечать корень).

Заметим, что при $|F| = 1$ имеется единственное решение (2.63), соответствующее точке касания орбит, а при $a = 0$ уравнение (2.61) приводится к виду $(\tilde{p}e_2\cos\alpha - p_2\tilde{e})\cos\eta_2 = p_2 - \tilde{p}$, решение которого очевидно.

Из (2.61) находят радиус-вектор точки A_2. Ясно, при правильном определении корня η_2 соблюдается условие: $r_{\pi 2} \le r_2 \le r_{a2}$.

5) Находят располагаемую и потребную скорости КА в точке A_2.

Для определения величины и направления располагаемой скорости V_2 имеем соотношения:

$$V_2 = \sqrt{2\tilde{h} + \frac{2\mu}{r_2}}; \quad \theta_2 = \operatorname{arctg}\frac{e\sin\eta_2}{1 + e\cos\eta_2}.$$

Величина и направление потребной скорости V_2' определяется по соотношениям:

$$C_2 = \sqrt{p_2\mu}; \quad h_2 = \frac{\mu(e_2^2 - 1)}{2p_2}; \quad V_2' = \sqrt{2h_2 + \frac{2\mu}{r_2}}; \quad \theta_2' = \operatorname{arctg}\frac{e\sin\eta_2'}{1 + e\cos\eta_2'}.$$

6) Находят основные характеристики маневра. Величина 2-го импульса скорости

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_2^2 + V_2'^2 - 2V_2V_2'\cos(\theta_2 - \theta_2')}.$$

Суммарная величина импульсной скорости, необходимая для совершения маневра

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Время совершения маневра определяют при помощи соотношений (2.42), (2.46), применяя параметры переходной орбиты $\tilde{e}, \tilde{p}, \eta_1', \eta_2$.

Для составления алгоритма и программы расчета траектории плоского двухимпульсного маневра перехода КА с одной эллиптической орбиты на другую эллиптическую орбиту необходимо:

– разработать иллюстрацию траектории маневра на основе исходных данных, приведенных для варианта задания;

– разработать алгоритм расчета траектории на основе приведенной выше методики (при этом рекомендуется использовать упрощения по сравнению с общей методикой, определяемые исходными данными варианта задания).

2.6 Пространственные маневры КА

Пространственные маневры необходимы, если начальная и конечная орбиты не являются компланарными. Ясно, что пространственный маневр требует бóльших затрат характеристической скорости по сравнению со случаем, когда те же орбиты находятся в одной плоскости. Поэтому при выборе схемы маневра с поворотом плоскости движения руководствуются следующим правилом: если поворот можно осуществить в различных точках орбиты, то весь поворот, либо бóльшая его часть проводится в той точке, где скорость минимальна.

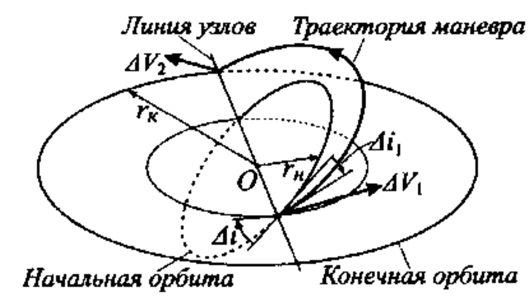


Рис. 2.11. Двухимпульсный переход между некомпланарными круговыми орбитами

Рассмотрим двухимпульсный переход между двумя некомпланарными круговыми орбитами (Δi – угол некомпланарности) с разными радиусами, причем $r_н < r_к$ (рис. 2.11). Оба импульса сообщаются на линии узлов; переходная траектория в случае гоманновского маневра (оптимального в классе двухимпульсных маневров по энергетическим затратам) имеет вид полуэллипса с радиусом перицентра $r_н$ и радиусом апоцентра $r_к$. Первый импульс используется для увеличения скорости до перигейной и одновременно для поворота плоскости движения на угол Δi_1 $(0 \le \Delta i_1 \le \Delta i)$. Переход происходит в промежуточной плоскости. Второй импульс прикладывается для доворота плоскости движения на угол $\Delta i - \Delta i_1$ и увеличения скорости до круговой.

Суммарный импульс скорости на совершение маневра $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, причем

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_н^2 + V_{пэ}^2 - 2V_н V_{пэ} \cos\Delta i_1} =$$

$$= \sqrt{V_{кр}^2(r_н) + V_{кр}^2(r_н)\frac{2r_к}{r_н + r_к} - 2V_{кр}^2(r_н)\sqrt{\frac{2r_к}{r_н + r_к}}\cos\Delta i_1};$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_к^2 + V_{аэ}^2 - 2V_к V_{аэ}\cos(\Delta i_1 - \Delta i)} =$$

$$= \sqrt{V_{кр}^2(r_к)\frac{2r_н}{r_н + r_к} + V_{кр}^2(r_к) - 2V_{кр}^2(r_к)\sqrt{\frac{2r_н}{r_н + r_к}}\cos(\Delta i_1 - \Delta i)},$$

где $V_{пэ}$ и $V_{аэ}$ – скорости, соответственно, в перицентре и апоцентре переходной траектории.

Суммарный, отнесенный к $V_{кр}(r_н)$, импульс скорости составит

$$\Delta u_\Sigma = \sqrt{\frac{1+3\bar{r}}{1+\bar{r}} - 2\sqrt{\frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}}}\cos\Delta i_1} + \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}}\sqrt{\frac{3+\bar{r}}{1+\bar{r}} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}}}\cos(\Delta i_1 - \Delta i)}, \tag{2.64}$$

где $\bar{r} = \dfrac{r_к}{r_н}$.

Положив в (2.64) $\Delta i_1 = 0$ либо $\Delta i_1 = \Delta i$, можно получить два частных случая, когда переходная орбита расположена в плоскости начальной, либо в плоскости конечной орбиты. Последний случай – самый нерациональный по энергетическим затратам, так как поворот плоскости производится при наибольшей скорости движения.

Для определения оптимальной величины Δi_1, минимизирующей Δu_Σ, имеется условие

$$\frac{\partial \Delta u_\Sigma}{\partial \Delta i_1} = 0. \tag{2.65}$$

Получаемое из (2.65) уравнение может быть решено численными методами.

Заметим, что время совершения маневра не зависит от величины Δi_1, а равно половине периода обращения, найденного по формуле (2.47) с использованием значений $r_н$ и $r_к$.

В ряде случаев уменьшение затрат скорости на совершение маневра может быть получено путем использования трехимпульсного маневра, основная идея которого заключается в повороте плоскости движения в апоцентре переходной траектории, где скорость минимальна. Ограничимся рассмотрением простейшего случая перехода между двумя круговыми орбитами с одним поворотом плоскости движения. Этот вид маневра обобщает плоский трехимпульсный ма-

невр, рассмотренный в подразделе 2.5, причем линия апсид переходных полуэллипсов совпадает с линией узлов, образованной плоскостями начальной и конечной орбит. С помощью первого импульса КА переводится на переходную траекторию с радиусом перицентра $r_н$ и радиусом апоцентра $r_а > r_к$. С помощью второго импульса происходит поворот плоскости движения на угол Δi_1 и одновременно переход на орбиту с радиусом перицентра $r_к$ и радиусом апоцентра $r_а$. Третий импульс – тормозной – переводит КА на круговую орбиту с радиусом $r_к$. Все три импульса прикладываются на линии узлов.

Задачи

2.21 Найти затраты импульсной скорости, необходимые для двухимпульсного перевода ИСЗ с опорной околоземной орбиты радиусом 6 600 км и наклонением $i = 51{,}7^\circ$ на геостационарную орбиту (радиусом 42 164 км) с одним поворотом плоскости движения за счет второго импульса.

2.22 Найти затраты импульсной скорости, необходимые для трехимпульсного перевода ИСЗ с опорной околоземной орбиты радиусом 6 600 км и наклонением $I = 51{,}7^\circ$ на геостационарную орбиту с одним поворотом плоскости движения за счет второго импульса. Принять радиус апоцентра переходной траектории $r_а = 150\,000$ км.

2.23 Найти угол некомпланарности между двумя орбитами, характеризуемыми значениями долготы восходящего узла, соответственно, Ω_1 и Ω_2 и наклонениями i_1 и i_2.

Указание: воспользоваться тем, что в орбитальной неподвижной системе координат $Ox_\omega y_\omega z_\omega$ единичный вектор нормали к плоскости орбиты $\mathbf{n} = [0;\, 0;\, 1]^T$. Используя матрицы перехода от орбитальных к абсолютной геоцентрической системе координат $Ox_{ га}y_{га}z_{га}$ (2.50), нужно найти компоненты векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ нормалей к заданным орбитам в системе $Ox_{га}y_{га}z_{га}$.

Очевидно, $\cos\Delta i = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$.

2.24 (*выполняется с использованием ЭВМ*). Разработать алгоритм и программу численного расчета суммарных затрат импульсной скорости для двухимпульсного пространственного маневра, считая, что фокальные линии начальной и конечной орбит совпадают; переход производится по полуэллиптической траектории из перицентра начальной орбиты в апоцентр конечной орбиты. Параметры орбит, угол некомпланарности, угол начального поворота плоскости движения Δi_1 считаются заданными.

2.25 (*выполняется с использованием ЭВМ*). Используя соотношения (2.64) и (2.65), разработать алгоритм и программу численного расчета оптимального угла начального поворота плоскости движения величины Δi_1, минимизирующего суммарный, отнесенный к $V_{кр}(r_н)$, импульс скорости Δu_Σ на совершение двухимпульсного пространственного маневра. Параметры орбит и угол некомпланарности считаются заданными.

2.7 Задача трех тел

В задаче трех тел рассматривается движение трех материальных точек, обладающих массами m_1, m_2 и m_3 соответственно, под действием сил взаимного тяготения. Поле тяготения каждой из материальных точек является центральным. В некоторой инерциальной системе координат радиус-вектор i-ой точки $\mathbf{r}_i = [x_i; y_i; z_i]^T$, а вектор скорости – $\mathbf{V}_i = [\dot{x}_i; \dot{y}_i; \dot{z}_i]^T$. В начальный момент времени значения $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, 3$ известны. Требуется определить координаты и скорости каждой из материальных точек в любой момент времени t. Такая постановка задачи обладает достаточной точностью при исследовании движения небесных тел, находящихся на значительном расстоянии друг от друга, когда размерами каждого из тел можно пренебречь.

Составим уравнения движения с использованием второго закона Ньютона. Например, для первой точки запишем

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1. \tag{2.66}$$

Сила $\mathbf{F}_1$, действующая на материальную точку m_1, складывается из сил тяготения $\mathbf{F}_{21}$ и $\mathbf{F}_{31}$, действующих со стороны второй и третьей точки. При этом

$$\mathbf{F}_{21} = \gamma\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \qquad \mathbf{F}_{31} = \gamma\frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1),$$

где γ – гравитационная постоянная, а $\rho_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Поэтому уравнение (2.66) можно записать в виде

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \gamma\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\right]. \tag{2.67}$$

Уравнения, аналогичные (2.67), могут быть записаны для второй и третьей материальных точек. Каждое из векторных уравнений эквивалентно трем скалярным уравнениям. Поэтому полная система уравнений, описывающих движение материальных точек, включает девять уравнений второго порядка и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = F_{ix} = \gamma\left[\dfrac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(x_j - x_i) + \dfrac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3}(x_k - x_i)\right]; \\ m_i\ddot{y}_i = F_{iy} = \gamma\left[\dfrac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(y_j - y_i) + \dfrac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3}(y_k - y_i)\right]; \\ m_i\ddot{z}_i = F_{iz} = \gamma\left[\dfrac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(z_j - z_i) + \dfrac{m_i m_k}{\rho_{ik}^3}(z_k - z_i)\right], \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{2.68}$$

а тройка индексов i, j, k образует четную перестановку индексов 1, 2, 3.

Потенциальную энергию системы трех материальных точек можно представить как работу, взятую со знаком «минус», необходимую для того, чтобы развести массы на бесконечно большое расстояние друг от друга. Выражение для потенциальной энергии обобщает выражение (1.19) потенциала в задаче двух тел и имеет вид:

$$\Pi = -\gamma\left[\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}}\right]. \tag{2.69}$$

Потенциальная энергия представляет собой функцию девяти координат: $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_3)$. Несложно путем дифференцирования соотношения (2.69) убедиться в справедливости для данной задачи общих соотношений, связывающих выражения производных от потенциальной энергии по координатам и обобщенных сил:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} = -F_{ix}; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial y_i} = -F_{iy}; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial z_i} = -F_{iz}. \tag{2.70}$$

Поэтому система уравнений (2.68) может быть переписана в виде

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}; \quad m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}; \quad m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.71}$$

где потенциальная энергия Π определяется соотношением (2.69).

В рассматриваемой задаче могут быть получены некоторые из интегралов уравнений движения. Запишем уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}; \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32}; \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Складывая уравнения (2.72) почленно и учитывая, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, найдем:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = 0.$$

Дважды интегрируя последнее уравнение, получим

$$\begin{aligned} m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3 &= \hat{\mathbf{v}}; \\ m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 &= \hat{\mathbf{v}}t + \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \tag{2.73}$$

где $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ – постоянные векторы.

Пусть $m = m_1 + m_2 + m_3$ – масса системы материальных точек;

$\mathbf{r}_c = \dfrac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3)$ – радиус-вектор ее центра масс – *барицентра*.

Тогда интегралы уравнений движения (2.73) могут быть переписаны в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m}\hat{\mathbf{v}}; \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{m}(\hat{\mathbf{v}}t + \hat{\mathbf{r}}). \tag{2.74}$$

Таким образом, центр масс системы в инерциальном пространстве движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\hat{\mathbf{v}}$; вектор $\hat{\mathbf{r}}$ определяет начальное положение центра масс.

Заметим, что соотношения (2.74), называемые интегралами движения центра масс системы, могут быть получены и из теоремы о движении центра масс. Для получения остальных интегралов задачи трех тел воспользуемся известными теоремами механики.

Так как внешние силы отсутствуют, то из теоремы об изменении кинетического момента следует, что момент количества движения системы материальных точек относительно начала координат остается постоянным

$$m_1(\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_1)+m_2(\mathbf{r}_2\times\dot{\mathbf{r}}_2)+m_3(\mathbf{r}_3\times\dot{\mathbf{r}}_3)=m\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.75}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – постоянный вектор.

Векторное равенство (2.75) равносильно трем скалярным соотношениям в проекциях на оси декартовой системы координат. Эти соотношения, которые называют интегралами площадей, указывают на то, что средняя секториальная скорость $\dfrac{dS_j}{dt}$ проекций точек M_1, M_2 и M_3 на любую из координатных плоскостей ($j=1,2,3$ – индекс координатной плоскости) остается постоянной, т.е.

$$\frac{dS_j}{dt}=\frac{1}{m}\left(m_1\frac{dS_{1j}}{dt}+m_2\frac{dS_{2j}}{dt}+m_3\frac{dS_{3j}}{dt}\right)=\frac{\sigma_j}{2}, \tag{2.76}$$

где $\dfrac{dS_{ij}}{dt}$ и σ_j – соответственно, проекции векторов $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i)$ и $\boldsymbol{\sigma}$ на j-ую координатную ось. Соотношение (2.76) обобщает понятие интеграла площадей, введенное в подразделе 2.1 для задачи двух тел.

Далее, рассматриваемая система материальных точек является консервативной, поэтому полная механическая энергия системы остается неизменной: $H=T+\Pi=\text{const}$. Записывая выражение кинетической энергии T и используя представление (2.69) потенциальной энергии Π, получаем

$$\frac{1}{2}(m_1\dot{r}_1^2+m_2\dot{r}_2^2+m_3\dot{r}_3^2)-\gamma\left(\frac{m_1m_2}{\rho_{12}}+\frac{m_1m_3}{\rho_{13}}+\frac{m_2m_3}{\rho_{23}}\right)=H. \tag{2.77}$$

Выражение (2.77) называют интегралом энергии.

Итак, шесть скалярных соотношений, полученных из (2.74), три соотношения (2.76) и одно соотношение (2.77) представляют собой десять первых интегралов уравнений движения (2.68). Оставшиеся восемь интегралов уравнений движения, если они и существуют, ввиду сложности их структуры пока не получены. Это обстоятельство определяет выбор численных методов решения предварительно преобразованных уравнений движения. Наибольшее распространение при рассмотрении различных приложений задачи трех тел получил метод оскулирующих элементов [8].

Использование дополнительных предположений позволяет получить некоторые качественные выводы. Например, в *ограниченной круговой задаче трех тел* приняты следующие допущения:

- притяжением первой из материальных точек (соответствующей КА), можно пренебречь;

- две бóльшие материальные точки m_2 и m_3 движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс (барицентра) с постоянной угловой скоростью ω.

Опуская индекс, соответствующий первой точке, и поместив начало системы координат в барицентр, перепишем уравнение движения КА (2.67) в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}=\gamma\left[\frac{m_2}{\rho_2^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})+\frac{m_3}{\rho_3^3}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r})\right], \tag{2.78}$$

где $\rho_j=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|$.

Далее будем рассматривать движение в системе координат $Oxyz$, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг оси Oz вместе с системой материальных точек m_2 и m_3, так что вектор угловой скорости системы $Oxyz$ $\boldsymbol{\omega}=[0;0;\omega]^T$. Запишем вместо (2.78) уравнение относительного движения

$$\ddot{\mathbf{R}}=\gamma\left[\frac{m_2}{\rho_2^3}(\mathbf{R}_2-\mathbf{R})+\frac{m_3}{\rho_3^3}(\mathbf{R}_3-\mathbf{R})\right]-\mathbf{w}_e-\mathbf{w}_k, \tag{2.79}$$

где $\mathbf{R}=[X,\ Y,\ Z]^T$ – радиус-вектор КА и $\mathbf{R}_i=[X_i,\ Y_i,\ 0]^T$, $i=2,3$ – радиус-векторы точек m_2 и m_3 в системе координат $Oxyz$. Так как начало системы координат неподвижно, а вращение происходит с постоянной угловой скоростью, то, как известно из теоретической механики, переносное ускорение $\mathbf{w}_e=-\omega^2\mathbf{R}$; кориолисово ускорение $\mathbf{w}_k=2(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{R}})$. Уравнение (2.79) равносильно трем скалярным уравнениям в проекциях на оси системы $Oxyz$

$$\begin{cases}\ddot{X}=\gamma\left[\dfrac{m_2}{\rho_2^3}(X_2-X)+\dfrac{m_3}{\rho_3^3}(X_3-X)\right]+\omega^2X+2\omega\dot{Y};\\[2mm] \ddot{Y}=\gamma\left[\dfrac{m_2}{\rho_2^3}(Y_2-Y)+\dfrac{m_3}{\rho_3^3}(Y_3-Y)\right]+\omega^2Y-2\omega\dot{X};\\[2mm] \ddot{Z}=-\gamma Z\left[\dfrac{m_2}{\rho_2^3}+\dfrac{m_3}{\rho_3^3}\right]+\omega^2Z.\end{cases} \tag{2.80}$$

Численное решение системы уравнений (2.80) позволяет, например, количественно оценить возмущения, оказываемые одной из гравитирующих масс на орбитальное движение КА относительно другой гравитирующей массы. В частности, решение системы (2.80) на интервале времени, равном периоду обращения КА, может быть использовано для определения возмущений элементов орбиты, рассмотренных в подразделе 2.3, за один виток.

Введем в рассмотрение функцию

$$U=-\gamma\left(\frac{m_2}{\rho_2}+\frac{m_3}{\rho_3}\right)-\frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2+Z^2). \tag{2.81}$$

С ее использованием уравнения (2.80) могут быть представлены в виде

$$\ddot{X} = -\frac{\partial U}{\partial X} + 2\omega\dot{Y};\quad \ddot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y} - 2\omega\dot{X};\quad \ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z}. \tag{2.82}$$

Умножим первое уравнение (2.82) на $2\dot{X}$, второе – на $2\dot{Y}$, третье – на $2\dot{Z}$ и сложим полученные соотношения. Запишем

$$2\left(\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} + \dot{Z}\ddot{Z}\right) = -2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial U}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial U}{\partial Z}\dot{Z}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) = -2\frac{dU}{dt}. \tag{2.83}$$

Интегрируя (2.83) и учитывая выражение квадрата скорости КА $V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2$, окончательно получим

$$V^2 = -2U + C, \tag{2.84}$$

где C – константа интегрирования, задающая энергетический уровень траектории КА. Соотношение (2.84) называется *интегралом Якоби*. Поверхность $2U(X,Y,Z) = C$, задающую множество точек, в которых КА может находиться при $V = 0$, называют поверхностью Хилла.

Из (2.82) следует, что в точках на поверхности Хилла, в которых выполняются условия

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0;\quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0;\quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \tag{2.85}$$

относительное ускорение КА равно нулю. Эти точки являются точками относительного равновесия КА и называются *точками либрации*. Из последнего уравнения (2.82) и выражения (2.81) видно, что условие $\ddot{Z} = 0$ может выполняться лишь при $Z = 0$, т.е. точки либрации могут располагаться только в плоскости Oxy. Если начальная относительная скорость КА в точке либрации равна нулю, то в дальнейшем КА будет неподвижен относительно гравитирующих точек.

Для ограниченной задачи трех тел существует пять точек либрации, которые расположены следующим образом: три из них, называемые прямолинейными (коллинеарными), расположены на прямой, соединяющей гравитирующие точки (рис. 2.12). Две другие, называемые треугольными точками Лагранжа, расположены в вершинах двух правильных треугольников, построенных на отрезке, соединяющем точки m_2 и m_3. Для системы Земля-Луна (в предположении, что тела движутся по круговым орбитам, так что расстояние $|m_2m_3| = 384\,400$ км неизменно; Луна имеет массу m_2) точки либрации расположены на следующих расстояниях:

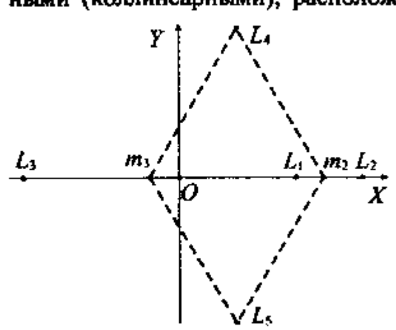


Рис. 2.12. Схема расположения точек либрации L_i, $i = 1, \ldots, 5$

$|m_2L_1| = 58\,000$ км; $|m_2L_2| = 65\,000$ км;

$|m_2L_4| = |m_2L_5| = 384\,400$ км;

$|m_3L_3| = 380\,000$ км; $|m_3O| = 4\,660$ км.

Показано, что в треугольных точках Лагранжа положение равновесия оказывается устойчивым, а в коллинеарных точках – неустойчивым [8]. Последнее означает, что КА может удерживаться в коллинеарных точках либрации лишь при условии периодического приложения к нему корректирующих воздействий.

Точки либрации могут иметь большое практическое значение, в частности, при реализации стационарных спутников.

Задача 2.26 *(выполняется с использованием ЭВМ)*. На основе уравнений (2.80) разработать алгоритм и программу численного расчета координат точек либрации для системы Земля-Луна, приняв для Луны $\gamma m_2 = 4{,}903\cdot 10^{12}$ м^3/с^2, для Земли $\gamma m_3 = 3{,}986\cdot 10^{14}$ м^3/с^2, $\omega = \frac{2\pi}{3600\cdot 24\cdot 27{,}3217}$ рад/с, расстояние $|m_2m_3| = 384\,400$ км.

Указание. При численном решении системы нелинейных уравнений, включающей уравнения вида $x = f(x)$, итерации проводить по формуле $x^{(k+1)} = (1-\alpha)x^{(k)} + \alpha f(x^{(k)})$, где коэффициент $\alpha \in (0; 1)$ подбирается из условия сходимости итерационного процесса.

3 ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

3.1 Основные понятия. Классификация измерительных средств, измеряемых параметров и методов обработки результатов измерений

Для определения движения космического аппарата необходимо располагать информацией о параметрах его траектории, которая может быть получена путем так называемых *навигационных измерений*. При этом измеряются не искомые параметры траекторного движения КА, а некоторые другие величины, функционально связанные с искомыми. Функциональная связь может быть записана в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ есть m-мерный вектор *измеряемых параметров*; $\mathbf{x}$ – шестимерный вектор параметров движения КА. Вектор $\mathbf{x}$ может включать, например, элементы орбиты, либо координаты центра масс КА и составляющие его вектора скорости в выбранной системе координат. Вектор функций $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6]^T$ указывает способ математической обработки результатов измерений. Определение вектора $\mathbf{x}$ составляет *навигационную задачу*.

Измерительные системы подразделяют на две группы – бортовые системы (находящиеся на борту КА) и системы внешнетраекторных измерений (как правило, наземные системы). Последние получили наибольшее распространение в практике космических полетов. В соответствии с физическими принципами функционирования измерительные системы подразделяют на радиотехнические, оптические, гравиметрические, магнитометрические и другие. Основными типами являются радиотехнические и оптические измерительные системы.

Наземными измерительными средствами (ИС), расположенными на одном или нескольких измерительных пунктах (ИП), могут измеряться:

- наклонная дальность от измерительного пункта до КА;
- радиальная скорость КА относительно ИП;
- направляющие косинусы линии визирования КА в системе координат, связанной с поверхностью Земли, и другие углы, определяющие направление этой линии (например, азимут и угол места);
- угловые скорости линии визирования КА.

Каждому измеряемому параметру может быть поставлена в соответствие *позиционная поверхность*, значение данного параметра в точках которой неизменно. Наклонной дальности соответствует позиционная поверхность в виде сферы с центром в базисной точке; направляющему косинусу – конус с вершиной в базисной точке и осью, направленной по координатной линии системы координат; азимуту – вертикальная плоскость, проходящая через базисную точку. Если ИС измеряет два параметра, то их неизменным значениям соответствует *позиционная линия*. Позиционные плоскости и позиционные линии обобщенно называют *позиционными элементами*. Точка пересечения позиционных элементов определяет текущее положение центра масс КА.

Теоретически минимальное число измеряемых параметров, необходимых для решения навигационной задачи (3.1), равно шести, однако на практике из-за имеющихся ошибок измерений обычно используют избыточное количество полученных измерительных данных с тем, чтобы в процессе обработки результатов измерений за счет избыточности данных выявить и устранить эти ошибки.

Различают ошибки трех видов: систематические, случайные и грубые. Появление систематической ошибки связано с погрешностью измерительного средства, используемой математической модели, наличием других неучтенных постоянных или медленно меняющихся факторов. Случайная ошибка возникает в результате воздействия случайных возмущений; математическое ожидание случайной ошибки в каждом сеансе измерений близко к нулю. Грубые ошибки связаны с резким нарушением условий работы измерительных средств при отдельных измерениях (например, выходом из строя элементов измерительной аппаратуры, непредвиденным посторонним вмешательством и т.д.).

Наличие ошибок измерений делает задачу определения параметров движения КА недетерминированной, и для ее решения используют различные математические статистические методы. Выбор тех или иных методов обусловливается априорно известными сведениями об искомых параметрах и статистических свойствах ошибок измерений. Степень полноты использования перечисленных сведений определяет выбор критерия оптимальности; наибольшее распространение получил критерий минимума дисперсии определяемых параметров [8]. Удовлетворяющие этому критерию статистические методы разделяют на две группы. Методы первой группы – метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов – требуют для своего применения полного объема информации, которую необходимо собрать в течение всего сеанса измерений. Методы второй группы (к ним относят и метод динамической фильтрации) осуществляют обработку по нарастающему объему измерений.

3.2 Использование метода наименьших квадратов при обработке результатов измерений

При математической обработке результатов измерений большое распространение получил метод наименьших квадратов. Вкратце изложим применение метода.

Имеется выборка, включающая значения функции $y = f(t)$ для $(n+1)$ значения аргумента t, т.е. даны точки (t_i, f_i), $i = 0, \dots, n$, полученные как результат измерений некоторого параметра. Предполагая, что функция $f(t)$ является эмпирической, содержащей ошибки измерений реализацией гладкой зависимости $p(t)$, поставим задачу определения функции $p(t)$ (приближающей функции) и сглаженных значений измерений $\hat{f}_i = p(t_i)$. Функция $p(t)$ должна иметь простой аналитический вид и быть «близка» ко всем точкам (t_i, f_i) одновременно.

Считается, что разность $h_i = p(t_i) - f(t_i)$ представляет собой ошибку измерения в i-й точке. Часто в качестве $p(t)$ выбирают полином $P_m(t)$, степень m которого должна соответствовать характеру изменения измеряемого параметра. Как правило, $m << n$; обычно принимают $m \le 5 \div 8$. Коэффициенты полинома $P_m(t)$ подбираются так, чтобы минимизировать сумму S квадратов ошибок:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (P_m(t_i) - f_i)^2 \to \min. \qquad (3.2)$$

Здесь целесообразно использование аппроксимации на основе ортогональных полиномов [11]. Говорят, что полиномы $q_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$ (k – степень полинома) ортогональны на множестве значений $\{t_0, \dots, t_n\}$, если для них выполняется условие

$$\sum_{i=0}^{n} q_k(t_i) q_j(t_i) = \begin{cases} 0, & j \ne k; \\ \| q_k \|^2, & j = k. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Величину $\| q_k \|$ называют нормой полинома $q_k(t)$ на множестве точек $\{t_0, \dots, t_n\}$.

Будем искать $P_m(t)$ в виде

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k q_k(t); \qquad (3.4)$$

вопрос определения полиномов $q_k(t)$ рассмотрим позднее.

Коэффициенты a_k в (3.4) подбираются так, чтобы минимизировать величину

$$S(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{m} a_k q_k(t_i) - f_i \right]^2. \qquad (3.5)$$

Необходимое условие экстремума функции $S(a_0, \dots, a_m)$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{m} a_k q_k(t_i) - f_i \right] q_j(t_i) = 0, \quad j = 0, \dots, m. \qquad (3.6)$$

Меняя порядок суммирования, приведем уравнения (3.6) к виду

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n} q_k(t_i) q_j(t_i) = \sum_{i=0}^{n} f_i q_j(t_i), \quad j = 0, \dots, m. \qquad (3.7)$$

В силу условий ортогональности (3.3) в левой части этого выражения ненулевым останется только член суммы с индексом $k = j$. Тогда

$$a_j \| q_j \|^2 = \sum_{i=0}^{n} f_i q_j(t_i), \quad j = 0, \dots, m.$$

Поменяв обозначение индекса j на k, запишем окончательную формулу для определения коэффициентов a_k

$$a_k = \frac{1}{\| q_k \|^2} \sum_{i=0}^{n} f_i q_k(t_i), \quad k = 0, \dots, m. \qquad (3.8)$$

Далее укажем способ построения полиномов $q_k(t)$. Положим

$$q_0(t) = 1; \quad q_1(t) = (t - \beta_0). \qquad (3.9)$$

Из условия ортогональности $q_0(t)$ и $q_1(t)$: $\sum_{i=0}^{n} 1 \cdot (t_i - \beta_0) = 0$ найдем

$$\beta_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} t_i. \qquad (3.10)$$

Следующие полиномы определяются по рекуррентной формуле

$$q_k(t) = (t - \beta_{k-1}) q_{k-1}(t) - \gamma_{k-2} q_{k-2}(t), \qquad (3.11)$$

причем коэффициенты β_{k-1} и γ_{k-2} находятся из условия ортогональности $q_k(t)$ ранее найденным полиномам. Для вычисления β_{k-1} умножим (3.11) на $q_{k-1}(t)$ и просуммируем по всем точкам. Получим

$$\sum_{i=0}^{n} q_{k-1}(t_i) q_k(t_i) = \\ = \sum_{i=0}^{n} t_i q_{k-1}^2(t_i) - \beta_{k-1} \sum_{i=0}^{n} q_{k-1}^2(t_i) - \gamma_{k-2} \sum_{i=0}^{n} q_{k-1}(t_i) q_{k-2}(t_i). \qquad (3.12)$$

В силу условия (3.3) левая часть и третье слагаемое в правой части (3.12) равны нулю. Отсюда находим

$$\beta_{k-1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i q_{k-1}^2(t_i)}{\sum_{i=0}^{n} q_{k-1}^2(t_i)}. \qquad (3.13)$$

Для вычисления γ_{k-2} умножим (3.11) на $q_{k-2}(t)$ и просуммируем по всем точкам. Получим

$$\sum_{i=0}^{n} q_{k-2}(t_i) q_k(t_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} t_i q_{k-2}(t_i) q_{k-1}(t_i) - \beta_{k-1} \sum_{i=0}^{n} q_{k-2}(t_i) q_{k-1}(t_i) - \gamma_{k-2} \sum_{i=0}^{n} q_{k-2}^2(t_i). \quad (3.14)$$

В силу условия (3.3) левая часть и второе слагаемое в правой части (3.14) равны нулю. Отсюда находим

$$\gamma_{k-2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i q_{k-2}(t_i) q_{k-1}(t_i)}{\sum_{i=0}^{n} q_{k-2}^2(t_i)}. \quad (3.15)$$

Итак, при помощи соотношений (3.9)-(3.11), (3.13), (3.15) можно построить систему ортогональных полиномов и далее по (3.8) и (3.4) найти приближающую функцию $P_m(x)$.

Величина среднеквадратичного отклонения (СКО) $\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} h_i^2}$ может быть использована для оценки качества аппроксимации и рационального выбора степени m сглаживающего полинома. Предположим, что известна инструментальная погрешность измерений ε. Возможны следующие случаи:

а) если $\sigma_m >> \varepsilon$, то аппроксимация слишком грубая, степень m мала, и необходимо ее увеличить;

б) если $\sigma_m << \varepsilon$, то аппроксимация физически недостоверная - в значениях $\hat{f}_i$ присутствуют ошибки измерений, т.е. сглаживание недостаточное; степень m необходимо уменьшить;

в) если $\sigma_m \approx \varepsilon$, то степень «оптимальна».

Если путем выбора степени m не удается достичь условия $\sigma_m \approx \varepsilon$, то это может свидетельствовать, в частности, о наличии в выборке аномальных измерений (измерений с грубыми ошибками). Вопрос о наличии или отсутствии в выборке аномальных измерений окончательно решается путем сравнения априорно известного закона распределения ошибок h_i (задается математическое ожидание и дисперсия ошибок) и фактического распределения ошибок h_i в выборке. Сравнение ведется с использованием специальных критериев «близости» этих двух законов. Если сравнение указывает на наличие аномальных измерений, то они соответствуют бóльшим по модулю ошибкам h_i. Аномальные измерения исключаются из выборки и определяются новые сглаженные значения измерений $\hat{f}_i$.

Изложенный подход позволяет частично устранить случайные и грубые ошибки на этапе предварительной обработки. Дальнейший анализ результатов измерений предпринимается для выявления и устранения систематических ошибок.

Сглаженные знач:[illegible]ния измерений $\hat{f}_i$ используются вместо измеренных значений f_i в дальнейшей обработке для определения параметров траектории.

Задача 3.1 (*выполняется с использованием ЭВМ*). Дана таблица значений функции $f(t)$ в $(n+1)$ узле: (t_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$. Требуется, используя метод наименьших квадратов на основе ортогональных полиномов, составить алгоритм и программу для вычисления на основе таблицы значений приближающего полинома m-й степени, построения графика $P_m(t)$ и вычисления ошибок измерений $h_i = P_m(t_i) - f(t_i)$.

Решить тестовый пример, приняв $m = 4$ и используя приведенную ниже таблицу значений функции $f(t)$ – высоты РН над поверхностью Земли.

t_i, с	f_i, км	t_i, с	f_i, км	t_i, с	f_i, км
40	4,5	80	18,8	120	40,3
50	7,8	90	23,3	130	46,8
60	11,5	100	27,8	140	51,8
70	13,6	110	33,4	150	58,7

3.3 Определение координат КА по измеренным дальностям

Рассмотрим дальномерный способ определения местоположения КА в случае, когда имеется минимально необходимое число измерений. Итак, пусть имеется три измерительных пункта, не лежащих на одной прямой; каждое из них определяет наклонную дальность D_i (расстояние от ИП до центра масс КА). Декартовы координаты измерительных пунктов x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, $i = 1, 2, 3$ в некоторой измерительной системе координат (ИСК) полагаются известными. Требуется определить координаты X, Y, Z центра масс КА (точки C).

Запишем уравнения позиционных поверхностей (сфер)

$$(X - x_{pi})^2 + (Y - y_{pi})^2 + (Z - z_{pi})^2 = D_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Решение системы нелинейных уравнений (3.16) может быть выполнено численными методами.

Рассмотрим здесь одно из возможных преобразований системы (3.16), позволяющее получить достаточно простые зависимости.

Введем обозначения: r_i – расстояние от начала ИСК до i-го измерительного пункта; D – расстояние от начала ИСК до точки C. Запишем выражения r_i и D:

$$r_i^2 = x_{pi}^2 + y_{pi}^2 + z_{pi}^2; \quad (3.17)$$

$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (3.18)$$

Выразим D через известные D_i и r_i. Для этого в уравнения (3.16) подставим выражения (3.17) и (3.18). Получим

$$D_i^2 = r_i^2 + D^2 - 2(x_{pi}X + y_{pi}Y + z_{pi}Z). \qquad (3.19)$$

Запишем теперь разности

$$D_1^2 - D_2^2 = r_1^2 - r_2^2 - 2[(x_{p1} - x_{p2})X + (y_{p1} - y_{p2})Y + (z_{p1} - z_{p2})Z];$$
$$D_1^2 - D_3^2 = r_1^2 - r_3^2 - 2[(x_{p1} - x_{p3})X + (y_{p1} - y_{p3})Y + (z_{p1} - z_{p3})Z]; \qquad (3.20)$$
$$D_2^2 - D_3^2 = r_2^2 - r_3^2 - 2[(x_{p2} - x_{p3})X + (y_{p2} - y_{p3})Y + (z_{p2} - z_{p3})Z].$$

Выражения (3.20) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных X, Y, Z; перепишем ее в виде

$$\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{C}, \qquad (3.21)$$

где $\mathbf{U} = [X;\ Y;\ Z]^T$;

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{p1} - x_{p2} & y_{p1} - y_{p2} & z_{p1} - z_{p2} \\ x_{p1} - x_{p3} & y_{p1} - y_{p3} & z_{p1} - z_{p3} \\ x_{p2} - x_{p3} & y_{p2} - y_{p3} & z_{p2} - z_{p3} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{D_2^2 - D_1^2 + r_1^2 - r_2^2}{2} \\ \dfrac{D_3^2 - D_1^2 + r_1^2 - r_3^2}{2} \\ \dfrac{D_3^2 - D_2^2 + r_2^2 - r_3^2}{2} \end{bmatrix}$$

Из (3.20) следует, что полученная система уравнений является вырожденной. Поэтому дальнейшее решение выглядит так. Первое и третье уравнения системы (3.21) представим в виде

$$X = k_1 Y + b_1, \quad Z = k_2 Y + b_2, \qquad (3.22)$$

где

$$k_1 = \frac{a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12}}{a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}}; \qquad b_1 = \frac{a_{33}c_1 - a_{13}c_3}{a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}};$$
$$k_2 = \frac{a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}}{a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}}; \qquad b_2 = \frac{a_{11}c_3 - a_{31}c_1}{a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}}.$$

Выражения (3.22) подставим в первое уравнение системы (3.16), которое становится квадратным уравнением относительно неизвестной Y. После преобразований получим

$$A\,Y^2 - 2\,B\,Y + C = 0, \qquad (3.23)$$

где $A = 1 + k_1^2 + k_2^2$; $B = k_1(x_{p1} - b_1) + k_2(z_{p1} - b_2) + y_{p1}$;

$$C = (b_1 - x_{p1})^2 + (b_2 - z_{p1})^2 + y_{p1}^2 - D_1^2.$$

Очевидно, уравнение (3.23) будет иметь два решения, одно из которых соответствует действительному положению КА, а другое – зеркальному отображению относительно базисной плоскости (плоскости, проходящей через три ИС). Чтобы выявить истинное решение, нужно из (3.22) определить остальные координаты КА и провести дополнительный анализ (например, если координатная плоскость Oxz близка к местной горизонтальной плоскости, а ось Oy направлена вверх, то нужно взять то решение, где $Y > 0$).

Рассмотрим частный случай, когда $y_{p1} = y_{p2} = y_{p3} = 0$ (координатная плоскость Oxz проходит через три ИС). Решение задачи упрощается: вместо (3.22) получим $X = b_1$; $Z = b_2$. Далее, из первого уравнения (3.16) выразим

$$Y = \pm\sqrt{D_1^2 - r_1^2 - X^2 - Z^2 + 2x_{pi}X + 2z_{pi}Z}. \qquad (3.24)$$

В формуле (3.24) нужно взять знак «+», если ось Oy направлена вверх.

Задача 3.2 (*выполняется с использованием ЭВМ*). Даны декартовы координаты трех ИП в относительной геоцентрической СК x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, а также измеренные продольные дальности D_i, $i = 1, 2, 3$. Составить алгоритм и программу расчета декартовых координат КА. С использованием программы рассчитать координаты КА для исходных данных, приведенных в таблице:

в км

i	x_{pi}	y_{pi}	z_{pi}	D_i
1	4 784	2 762	3 189	6 123
2	4 231	3 551	3 189	5 846
3	3 141	3 743	4 100	5 830

3.4. Определение координат КА по измеренным угловым величинам

Рассмотрим задачу вычисления координат КА в случае, когда имеется два измерительных пункта, и в каждом из них определяется направление линии визирования КА – линии, направленной из измерительного пункта в центр масс КА. Выберем расположение и ориентацию измерительных систем координат с центрами O_1, O_2 в соответствующих ИП следующим образом: оси O_1z_1 и O_2z_2 совмещены, а оси O_1x_1 и O_2x_2, O_1y_1 и O_2y_2, соответственно, параллельны; расстояние между O_1 и O_2 составляет известную величину – измерительную базу $Б$. На рис. 3.1 через l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2$) обозначены направляющие косинусы линий визирования – косинусы углов между линией визирования O_iC и осями O_ix_i, O_iy_i, O_iz_i.

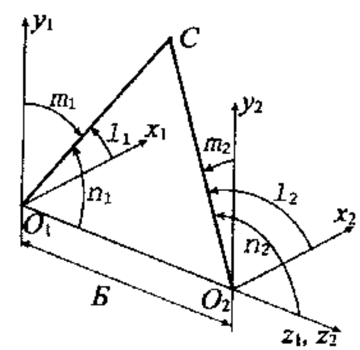


Рис. 3.1. Расположение позиционных элементов при измерении направляющих косинусов

Будем считать, что каждое из ИС измеряет по два направляющих косинуса. Заметим, что направляющие косинусы связаны известным соотношением

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \qquad (3.25)$$

из которого можно найти недостающее значение. Требуется определить координаты X_1, Y_1, Z_1 точки C – центра масс КА в ИСК первого ИП.

Для решения поставленной задачи запишем уравнения линий визирования в ИСК первого ИП [13]. Уравнение линии визирования O_1C имеет вид

$$\frac{X_1}{l_1} = \frac{Y_1}{m_1} = \frac{Z_1}{n_1} = D_1, \qquad (3.26)$$

а уравнение линии визирования O_2C, с учетом $X_2 = X_1$, $Y_2 = Y_1$, $Z_2 = Z_1 - Б$:

$$\frac{X_1}{l_2} = \frac{Y_1}{m_2} = \frac{Z_1 - Б}{n_2} = D_2. \qquad (3.27)$$

Здесь D_1 и D_2 – наклонные дальности, т.е. длины отрезков O_1C и O_2C.

Совокупность уравнений (3.26) и (3.27) обладает некоторой избыточностью, что позволяет рассмотреть несколько вариантов решения задачи. Например, из (3.26) и (3.27) составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{X_1}{l_1} = \dfrac{Z_1}{n_1}; \\ \dfrac{X_1}{l_2} = \dfrac{Z_1 - Б}{n_2}. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Разрешив (3.28) относительно неизвестной X_1, найдем

$$X_1 = \frac{Б l_1 l_2}{n_1 l_2 - n_2 l_1}.$$

С учетом (3.26) окончательно получаем выражение наклонной дальности

$$D_1 = \frac{Б l_2}{n_1 l_2 - n_2 l_1} \qquad (3.29)$$

и выражения для координат центра масс КА

$$X_1 = D_1 l_1, \quad Y_1 = D_1 m_1, \quad Z_1 = D_1 n_1. \qquad (3.30)$$

Формула (3.29) называется *формулой горизонтальной проекции*, так как в ней использованы направляющие косинусы по отношению к «горизонтальной» координатной плоскости. Эта формула неприменима, если объект расположен в вертикальной базовой плоскости $O_1y_1z_1$, где $l_1 = l_2 = 0$; ее применение приводит к значительным ошибкам, если КА расположен вблизи указанной плоскости.

Рассмотрим другой вариант решения задачи. Используя (3.26) и (3.27), составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{Y_1}{m_1} = \dfrac{Z_1}{n_1}; \\ \dfrac{Y_1}{m_2} = \dfrac{Z_1 - Б}{n_2}, \end{cases} \qquad (3.31)$$

откуда несложно найти

$$D_1 = \frac{Б m_2}{n_1 m_2 - n_2 m_1}, \qquad (3.32)$$

причем координаты центра масс КА, по-прежнему, будут определяться соотношениями (3.30).

Формула (3.32) называется *формулой вертикальной проекции*; критической для нее является горизонтальная базовая плоскость $O_1x_1z_1$, где $m_1 = m_2 = 0$.

Далее рассмотрим случай, когда первое измерительное средство измеряет направляющие косинусы m_1 и n_1 линии визирования O_1C, а второе – направляющий косинус m_2. Решение задачи определения координат X_1, Y_1, Z_1 центра масс КА в ИСК первого ИП иллюстрируется на рис 3.2, где искомая точка представляет собой точку пересечения линии визирования и вертикального конуса с вершиной в базисной точке O_2.

Запишем систему уравнений для позиционных элементов

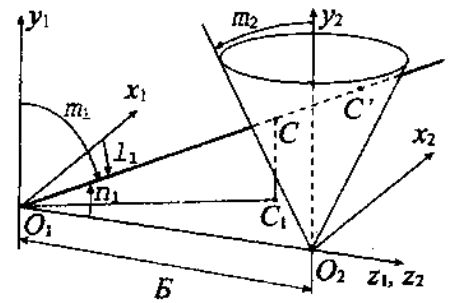


Рис. 3.2. Расположение позиционных элементов – линии визирования и вертикального конуса

$$\begin{cases} \dfrac{X_1^2 + (Z_1 - Б)^2}{1 - m_2^2} - \dfrac{Y_1^2}{m_2^2} = 0; \\ X_1 = \dfrac{l_1}{m_1} Y_1; \\ Z_1 = \dfrac{n_1}{m_1} Y_1. \end{cases} \qquad (3.33)$$

Первое из уравнений системы (3.33) задает вертикальный конус; два других – линию визирования.

Подставив выражения X_1 и Z_1 в первое уравнение (3.33), после несложных преобразований, проведенных с учетом (3.25), получим квадратное уравнение для неизвестной Y_1:

$$a{Y_1}^2 - 2bY_1 + c = 0. \qquad (3.34)$$

Здесь введены обозначения

$$a = \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2 m_2^2}, \qquad b = Б\frac{n_1}{m_1}, \qquad c = Б^2. \qquad (3.35)$$

Решение уравнения (3.34)

$$Y_1 = \frac{b}{a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}}\right) \qquad (3.36)$$

с учетом (3.35) приведем к виду

$$Y_1 = \frac{Б m_2}{m_2^2 - m_1^2}\left(n_1 \mp \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2} + n_1^2 - 1}\right) m_1. \qquad (3.37)$$

Использование выражения (3.37) не всегда приемлемо: в случае $m_1 \approx m_2$ знаменатель дроби в (3.37) стремится к бесконечности. Для устранения неопределенности используем следующий прием: умножим и разделим правую часть выражения (3.36) на $\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{ac}{b^2}}\right)$, что позволяет привести это выражение к виду

$$Y_1 = \frac{c}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}. \qquad (3.38)$$

После подстановки в (3.38) значений (3.35) получим

$$Y_1 = \frac{Б}{n_1 \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2} + n_1^2 - 1}} m_1. \qquad (3.39)$$

Из (3.39) с учетом (3.26) окончательно находим наклонную дальность

$$D_1 = \frac{Б}{n_1 \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2} + n_1^2 - 1}}. \qquad (3.40)$$

Выражение (3.40) называется *формулой вертикального конуса*. Координаты X_1, Y_1, Z_1 центра масс КА в ИСК первого ИП могут быть найдены по формулам (3.30).

Из формулы (3.40) видно, что координаты КА определяются неоднозначно, о чем свидетельствуют два знака перед корнем. Геометрически этот факт достаточно очевиден (на рис.3.2 линия визирования пересекает конус в двух точках C и C'). Чтобы исключить неоднозначность, необходимо производить дополнительный анализ.

Определение координат КА может быть выполнено в случае, если ИС измеряет не направляющие косинусы, а азимут и (или) угол места объекта. Обычно измерительная СК является горизонтальной топоцентрической системой координат, так что ее ось Ox направлена в горизонтальной плоскости на север. В этом случае угол места γ – это угол между линией визирования OC и ее проекцией OC_1 на местную горизонтальную плоскость (рис. 3.3); азимут α – угол между осью Ox и проекцией OC_1, отсчитываемый по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси Oy. Между направляющими косинусами и угловыми координатами (азимутом, углом места) существуют простые аналитические зависимости

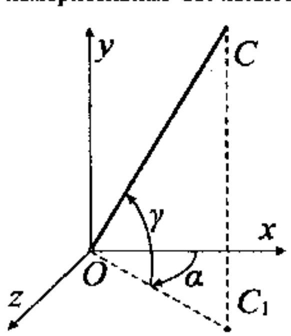


Рис. 3.3. Определение азимута и угла места

$$l = \cos\gamma\cos\alpha; \quad m = \sin\gamma; \quad n = \cos\gamma\sin\alpha. \qquad (3.41)$$

Во многих случаях определение координат КА ведут на основе совместного измерения дальности и угловых координат. Такой способ измерений называется угломерно-дальномерным. Наиболее просто задача решается в случае, когда одно ИС способно

произвести все необходимые измерения (наклонную дальность, углы азимута и места). В этом случае направляющие косинусы находят по (3.41); расчетные формулы для координат КА в ИСК данного измерительного средства имеют вид (3.30).

Однако на практике часто используют два ИС, одно из которых измеряет дальности, а другое – угловые координаты.

Задачи

3.3 Получить формулы горизонтальной и вертикальной проекции для случая, когда два ИС измеряют азимут и угол места, так что известны значения α_1, γ_1, α_2, γ_2, а также измерительная база $Б$.

3.4 Пусть первое ИС измеряет направляющие косинусы m_1 и n_1 линии визирования O_1C, а второе – направляющий косинус n_2. Требуется получить формулу для определения координат X_1, Y_1, Z_1 центра масс КА в ИСК первого ИС (формулу базового конуса), считая, что измерительная база $Б$ известна.

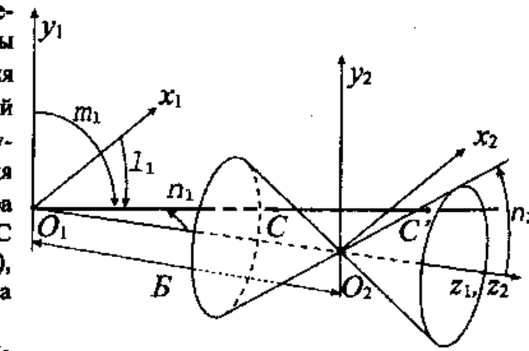


Рис. 3.4. Расположение позиционных элементов – линии визирования и базового конуса

Условия задачи иллюстрируются на рис 3.4, где искомая точка представляет собой точку пересечения линии визирования и базового конуса с вершиной в точке O_2 (точка C при $n_2 < 0$ или точка C' при $n_2 > 0$).

3.5 Пусть имеется два ИС. Требуется получить формулу для определения координат X_1, Y_1, Z_1 центра масс КА в ИСК первого ИП при угломерно-дальномерном способе измерений, когда известны направляющие косинусы l_1, m_1 и n_1 линии визирования O_1C, наклонная дальность $D_2 = |O_2C|$ и измерительная база $Б$.

3.6 В геоцентрической СК известны координаты центра масс КА X, Y, Z, а также координаты измерительного пункта x_p, y_p, z_p. Считается, что КА находится в зоне прямой видимости измерительного пункта, если угол места $\gamma > \gamma_{пр}$, где величина $\gamma_{пр} > 0$ зависит от условий наблюдения. Требуется выразить условия прямой видимости КА через данные задачи.

3.7 Геостационарный КА расположен в точке, имеющей долготу $\lambda = 45°$. Измерительный пункт находится на поверхности Земли в точке с геоцентрическими координатами $\varphi_p = 45°$, $\lambda_p = 60°$. Используя шаровую модель формы

Земли, определить направляющие косинусы углов, которые образует линия визирования КА с осями местной топоцентрической СК, берущей начало в точке расположения ИП, а также азимут и угол места КА.

3.5 Определение вектора скорости КА

Методы определения вектора скорости КА можно разделить на две группы: методы, основанные на измерениях скоростных параметров, и методы, использующие численное дифференцирование координат.

Рассмотрим первый способ. Здесь возможны несколько вариантов измерительных схем, определяемых составом измеряемых параметров; остановимся на двух из них.

Сначала рассмотрим случай, когда имеется три ИС, каждое из которых определяет наклонную дальность D_i и радиальную скорость $\dot{D}_i$ (составляющую скорости вдоль линии визирования). Декартовы координаты измерительных пунктов x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, $i = 1, 2, 3$ полагаются известными. Требуется определить составляющие вектора скорости центра масс КА (точки C).

Запишем уравнения позиционных поверхностей

$$(X - x_{pi})^2 + (Y - y_{pi})^2 + (Z - z_{pi})^2 = D_i^2, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.42}$$

где X, Y, Z – декартовы координаты КА, которые могут быть найдены путем применения методов, рассмотренных в подразделе 3.3. Продифференцируем уравнения (3.42) по времени и разделим каждое из полученных уравнений на $2D_i$. Придем к линейной системе алгебраических уравнений

$$l_i V_x + m_i V_y + n_i V_z = \dot{D}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.43}$$

Здесь $V_x = \dot{X}$; $V_y = \dot{Y}$; $V_z = \dot{Z}$ – искомые составляющие вектора скорости; l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы линии визирования O_iC – определяются соотношениями

$$l_i = \frac{X - x_{pi}}{D_i}; \quad m_i = \frac{Y - y_{pi}}{D_i}; \quad n_i = \frac{Z - z_{pi}}{D_i}. \tag{3.44}$$

Запишем систему (3.43) в матричном виде

$$\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \dot{\mathbf{D}}, \tag{3.45}$$

где $\mathbf{V} = [V_x;\ V_y;\ V_z]^T$; $\dot{\mathbf{D}} = [\dot{D}_1;\ \dot{D}_1;\ \dot{D}_1]^T$, а матрица системы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Матрица системы (3.45) невырождена, что вытекает из взаимной непараллельности линий визирования O_iC. Решение системы дает искомый вектор $\mathbf{V}$.

Далее рассмотрим случай, когда при помощи одного ИС измеряются следующие параметры: наклонная дальность D, радиальная скорость $\dot{D}$, углы

азимута α и места γ, а также производные от этих углов $(\dot{\alpha}, \dot{\gamma})$. Задачей, по-прежнему, является определение составляющих вектора скорости КА.

Найдем матрицу перехода от исходной топоцентрической системы координат $Oxyz$ к ИСК $Ox_uy_uz_u$, направление осей которой определяется составом измеряемых параметров (D, γ, α). Осуществление перехода требует выполнение двух последовательных поворотов системы координат (рис. 3.5). Первый поворот выполняется на угол α против оси Oy, второй поворот происходит вокруг промежуточной оси Oz' на угол γ.

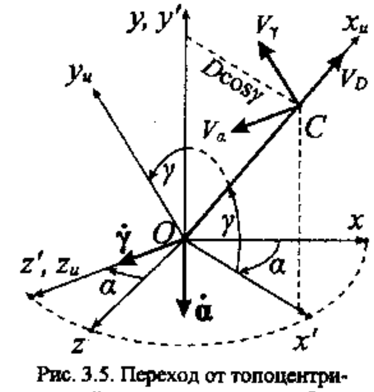


Рис. 3.5. Переход от топоцентрической системы координат $Oxyz$ к измерительной системе координат $Ox_uy_uz_u$

Матрицы перехода, соответствующие поворотам на углы α и γ, имеют вид

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Тогда искомая матрица перехода

$$\mathbf{A}_{mu} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & \sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\sin\gamma & \cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

В системе координат $Ox_uy_uz_u$ вектор скорости $\mathbf{V}_u = [V_D;\ V_\gamma;\ V_\alpha]^T$ имеет следующие составляющие

$$V_D = \dot{D}; \quad V_\gamma = D\dot{\gamma}; \quad V_\alpha = D\cos\gamma\,\dot{\alpha}. \tag{3.49}$$

С использованием найденной матрицы перехода получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_{mu}^T \mathbf{V}_u,$$

где $\mathbf{V} = [V_x;\ V_y;\ V_z]^T$. Выполнив перемножение, окончательно получим

$$\begin{aligned} V_x &= V_D\cos\alpha\cos\gamma - V_\gamma\cos\alpha\sin\gamma - V_\alpha\sin\alpha; \\ V_y &= V_D\sin\gamma + V_\gamma\cos\gamma; \\ V_z &= V_D\sin\alpha\cos\gamma - V_\gamma\sin\alpha\sin\gamma + V_\alpha\cos\alpha. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Рассмотрим способ вычисления составляющих вектора скорости, основанный на численном дифференцировании координат. Следует помнить, что при численном дифференцировании с использованием опытных значений ошибки измерений играют все большее влияние с увеличением порядка производной. Поэтому перед выполнением дифференцирования необходимо провести обработку результатов измерений, предусматривающую исключение аномальных результатов, ослабление погрешностей и т.д. (см. подраздел 3.2).

Будем считать что исходными данными являются измеренные и сглаженные в процессе обработки значения некоторой функции $f(t)$ в точках t_i, $i = 0, \ldots, n$. Примем, что f_i есть значения сглаживающего полинома $P_m(t)$ степени m.

Рассмотрим первую интерполяционную формулу Ньютона степени m с использованием конечных разностей на шаблоне $(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+m})$ с равноотстоящими узлами $t_{i+k} = t_i + kh$ (h – шаг сетки). Запишем [11]

$$P_m(t) = N_m(q) = f_i + \frac{\Delta f_i}{1!}q + \frac{\Delta^2 f_i}{2!}q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^m f_i}{m!}q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-m+1), \tag{3.51}$$

где $q = \dfrac{t - t_i}{h}$ – относительная координата; $\Delta^k f_i$, $k = 1, \ldots, m$ – конечные разности k-го порядка. Конечные разности могут быть вычислены по формуле

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.52}$$

где $\Delta^0 f_i = f_i$. Последовательность получения конечных разностей при $k = 3$ представлена в табл. 3.1.

Табл. 3.1

t_j	f_j	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
t_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
t_{i+1}	f_{i+1}	Δf_{i+1}	$\Delta^2 f_{i+1}$	
t_{i+2}	f_{i+2}	Δf_{i+2}		
t_{i+3}	f_{i+3}			

Конечная разность k-го порядка может быть также вычислена по формуле

$$\Delta^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{i+j}, \tag{3.53}$$

где $C_k^j = \dfrac{k!}{(k-j)!\,j!}$.

Используем формулу (3.51) для вычисления производной $f'(t)$, полагая, что $f'(t) \approx P'_m(t)$. Так как $P_m(t)$ – аналитическая функция, то шаг сетки h может быть выбран произвольно; производная $P'_m(t)$ вычисляется точно на всем интервале $[t_i; t_{i+m}]$ и представляет собой полином степени $m-1$. Дифференцирование (3.51) ведется с учетом соотношения $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dq}\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{h}\dfrac{d}{dq}$. Получим

$$f'(t) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \frac{\Delta^2 f_i}{2}(2q-1) + \frac{\Delta^3 f_i}{6}(3q^2 - 6q + 2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta^4 f_i}{12}(2q^3 - 9q^2 + 11q - 3) + \frac{\Delta^5 f_i}{24}(5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24) + \ldots\right]. \tag{3.54}$$

В частности, положив $m = 4$ и $q = 0$, из (3.54) найдем

$$f'_i \approx \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{\Delta^2 f_i}{2} + \frac{\Delta^3 f_i}{3} - \frac{\Delta^4 f_i}{4}\right]. \tag{3.55}$$

Формула (3.55) позволяет найти производную на левом конце интервала $[t_i; t_{i+4}]$, на котором заданы пять значений функции. На основе (3.54) можно получить и другие формулы. Так, для определения производной в средней точке интервала $[t_i; t_{i+4}]$ положим $m = 4$, $q = 2$ и найдем

$$f'_{i+2} = \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \frac{3\Delta^2 f_i}{2} + \frac{\Delta^3 f_i}{3} - \frac{\Delta^4 f_i}{12}\right]. \tag{3.56}$$

В случае, когда имеются выборки значений измеренных дальностей D_i, углов азимута α_i и места γ_i, либо других координат, формулы (3.55), (3.56) позволяют найти производные по времени от измеряемых параметров и далее найти составляющие вектора скорости по методике, изложенной ранее.

Из (3.54) несложно получить также формулы для вычисления второй производной функции $f(t)$.

Задачи

3.8 Пусть при помощи одного ИС измеряются следующие параметры: наклонная дальность D, радиальная скорость $\dot{D}$, направляющие косинусы l, n, а также производные от направляющих косинусов $\dot{l}$, $\dot{n}$. Требуется определить проекции вектора скорости КА $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ на оси ИСК, начало которой находится в измерительном пункте.

Указание: применить дифференцирование соотношений

$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad l = \frac{X}{D}; \quad n = \frac{Z}{D}.$$

3.9 В таблице заданы значения наклонной дальности:

Время t, с	500	505	510	515	520
Наклонная дальность D, км	650,30	684,92	719,95	755,61	791,64

Найти скорость изменения продольной дальности $\dot{D}$ и составляющую ускорения в направлении линии визирования $\ddot{D}$ в момент $t = 520$ с, используя численное дифференцирование. Принять степень интерполяционного полинома $m=4$.

3.10 (выполняется с использованием ЭВМ). Дополнить программу расчета координат КА, выполненную при решении задачи 3.2 (см. подраздел 3.3), расчетом составляющих вектора скорости КА на основе соотношений (3.44)–(3.46). Радиальные скорости $\dot{D}_i$, $i=1,2,3$ полагаются известными.

3.6 Определение координат КА по избыточному количеству измеренных дальностей

Ранее был указан способ определения координат КА X, Y, Z по трем измеренным наклонным дальностям. В этом случае задача определения места решается с ошибками, определяемыми погрешностями измерений. Если имеется большее число измерений, например измерений наклонной дальности четырьмя и более измерительными пунктами, либо для каждого ИП имеются измерения не только дальности, но также угла места и азимута, то избыточность данных позволяет уменьшить ошибку решения навигационной задачи.

Рассмотрим случай, когда решение задачи проводится на основе измерений продольной дальности D_i из n измерительных пунктов ($n>3$), декартовы геоцентрические координаты которых x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, $i=1,\ldots,n$ известны.

В этом случае решается переопределенная система уравнений относительно неизвестных геоцентрических координат X, Y, Z вида

$$(X-x_{pi})^2+(Y-y_{pi})^2+(Z-z_{pi})^2=D_i^2,\quad i=1,\ldots,n. \tag{3.57}$$

Используем метод наименьших квадратов для поиска решения системы (3.57), наилучшим образом приближающегося ко всем измеренным дальностям. Составим функции s_i, представляющие отклонения квадратов измеренных дальностей D_i от их фактических значений:

$$\begin{aligned} s_1 &=(X-x_{p1})^2+(Y-y_{p1})^2+(Z-z_{p1})^2-D_1^2;\\ &\ldots\\ s_n &=(X-x_{pn})^2+(Y-y_{pn})^2+(Z-z_{pn})^2-D_n^2. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Минимизируется сумма квадратов отклонений

$$S=\sum_{i=1}^{n}s_i^2. \tag{3.59}$$

Условие минимума (3.59) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial X}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial Y}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial Z}=0. \tag{3.60}$$

Подставив (3.58) и (3.59) в (3.60) и вычислив частные производные, в результате получим следующую систему уравнений для определения X, Y, Z:

$$\begin{aligned} f_1(X,Y,Z) &\equiv s_1(X-x_{p1})+s_2(X-x_{p2})+\ldots+s_n(X-x_{pn})=0;\\ f_2(X,Y,Z) &\equiv s_1(Y-y_{p1})+s_2(Y-y_{p2})+\ldots+s_n(Y-y_{pn})=0;\\ f_3(X,Y,Z) &\equiv s_1(Z-z_{p1})+s_2(Z-z_{p2})+\ldots+s_n(Z-z_{pn})=0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Введем вектор-столбец неизвестных $\mathbf{x}=[X, Y, Z]^T$ и вектор-столбец функций $\mathbf{f}=[f_1, f_2, f_3]^T$. Тогда система уравнений (3.61) запишется в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=0. \tag{3.62}$$

Для решения системы нелинейных уравнений (3.62) целесообразно использовать метод Ньютона [11]; этот метод в рассматриваемой задаче имеет достаточную область сходимости. В методе Ньютона составляют матрицу производных

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} & \frac{\partial f_1}{\partial Z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} & \frac{\partial f_2}{\partial Z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Y} & \frac{\partial f_3}{\partial Z} \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Из (3.61) находим выражения частных производных, входящих в (3.63):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial X} &=2[(X-x_{p1})^2+\ldots+(X-x_{pn})^2]+s_1+\ldots+s_n;\\ \frac{\partial f_1}{\partial Y} &=2[(Y-y_{p1})(X-x_{p1})+\ldots+(Y-y_{pn})(X-x_{pn})];\\ &\ldots\\ \frac{\partial f_3}{\partial Z} &=2[(Z-z_{p1})^2+\ldots+(Z-z_{pn})^2]+s_1+\ldots+s_n. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Вводя матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} X-x_{p1} & X-x_{p2} & \ldots & X-x_{pn}\\ Y-y_{p1} & Y-y_{p2} & \ldots & Y-y_{pn}\\ Z-z_{p1} & Z-z_{p2} & \ldots & Z-z_{pn} \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

далее матрицу производных $\mathbf{F}_x(\mathbf{x})$ представим в виде

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{x})=2\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+(s_1+s_2+\ldots+s_n)\mathbf{E}, \tag{3.66}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

В соответствии с алгоритмом метода Ньютона определяют начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}=[X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)}]$. Далее производят уточнение корней. Для этого строят итерационный процесс определения $(k+1)$-го приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ по известному $\mathbf{x}^{(k)}$ на основе соотношения

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \tag{3.67}$$

где $(\ )^{-1}$ – обратная матрица.

Окончательно принимают $x = \mathbf{x}^{(m)}$, где m – номер последней итерации.

Заметим, что из условия экстремума суммы (3.59) может быть получено решение, соответствующее минимуму или максимуму величины S. Так что здесь возможны три решения, из которых только одно – истинное. Например, если четыре ИС расположены в одной плоскости, то одно постороннее решение соответствует зеркальному отражению истинного решения относительно базовой плоскости, а другое находится на базовой плоскости между ИС (соответствуя максимуму величины S). Итерации по (3.67) будут сходиться к истинному решению при правильном выборе начального приближения. Для истинного решения найденный радиус-вектор КА больше радиуса Земли.

Полученные по окончании итераций координаты КА могут быть использованы для уменьшения систематической ошибки решения навигационной задачи. Пусть имеется выборка из ν навигационных измерений на некотором интервале времени. Обозначим через $\hat{D}_{ij}$, $j = 1, \dots, \nu$ наклонную дальность, найденную с использованием рассчитанных значений координат КА, а через $\hat{h}_{ij} = \hat{D}_{ij} - D_{ij}$ – ошибку i-го измерительного средства в j-м измерении. По выборке $\hat{h}_{ij}$, $j = 1, \dots, \nu$ может быть найдена среднеквадратичное отклонение σ_i i-го ИС. Далее каждому ИС присваивается весовой коэффициент $w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$.

В дальнейшем вычисление координат КА ведется на основе минимизации суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i s_i^2 . \tag{3.68}$$

Тогда решение будет в большей степени определяться результатами более точных измерений.

Существуют способы уменьшения систематических ошибок, основанные на преднамеренном внесении «эталонных» измерительных погрешностей. Эталонная погрешность i-го ИС δ может соответствовать сбою временной шкалы, отклонению координат ИС и т.д. На основе измеренных на интервале наблюдения дальностей D_{ij} и найденных на предыдущем этапе координат КА рассчитывают значения дальности $\overline{D}_{ij}$ с учетом погрешности δ и затем – координаты КА и «эталонные» ошибки $\overline{h}_{ij}$, $j = 1, \dots, \nu$. Определив коэффициент парной корреляции случайных величин $\hat{h}_i$ и $\overline{h}_i$ по их выборкам $\hat{h}_{ij}$ и $\overline{h}_{ij}$, $j = 1, \dots, \nu$, можно судить о наличии или отсутствии измерительной погрешности, пропорциональной δ.

Лабораторная работа
Решение навигационной задачи для КА

Даны декартовы координаты четырех измерительных пунктов в относительной геоцентрической СК x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, а также измеренные с погрешностями продольные дальности D_i, $i = 1, \dots, 4$.

Задание:

1. Составить алгоритм и программу расчета декартовых геоцентрических координат и геодезических координат в системе WGS-84.
2. С использованием программы рассчитать координаты КА для заданного варианта исходных данных.
3. Сделать выводы.

Варианты

№ варианта	Координаты ИП x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}, продольные дальности D_i, км							
	x_{p1} / z_{p1}	y_{p1} / D_1	x_{p2} / z_{p2}	y_{p2} / D_2	x_{p3} / z_{p3}	y_{p3} / D_3	x_{p4} / z_{p4}	y_{p4} / D_4
1	1 747	1 630	2 478	2 007	2 124	1 660	2 187	2 187
	5 914	1 090	5 524	1 139	5 781	1 011	5 579	1 111
2	3 509	4 037	3 805	4 080	3 538	3 664	2 954	4 066
	3 474	2 001	3 092	2 096	3 838	2 078	3 927	2 137
3	3 957	1 362	3 500	1 344	3 839	1 174	3 615	1 534
	4 814	3 038	5 160	3 009	4 957	3 024	5 026	3 005
4	– 432	– 6 174	432	– 6 174	0	– 6 031	– 109	– 6 238
	1 543	4 028	1 543	4 050	2 077	4 054	1 326	4 015
5	– 1 635	6 101	– 1323	6 224	– 1210	6 227	– 2 051	5 956
	– 888	5 015	– 445	5 066	– 667	5 078	– 998	5 025
6	3 515	3 394	3 953	3 317	3 158	3 633	3 189	3 189
	4 100	6 001	3 749	6 064	4 184	6 022	4 510	6 044
7	3 620	1 925	3 852	1 635	3 089	1 783	3 328	2 245
	4 886	7 000	4 814	7 027	5 288	7 061	4 957	7 023
8	3 921	1 199	4 545	1 049	4 060	1 012	4 482	1 543
	4 886	8 031	4 350	8 022	4 814	8 021	4 268	8 033
9	– 921	4 334	– 668	4 215	– 1 174	3 839	– 903	3 911
	4 588	9 045	4 740	9 025	4 957	9 015	4 957	9 000
10	– 2 998	3 573	– 2 854	3 060	– 2 803	2 352	– 3 206	2 416
	4 350	10 093	4 814	10 003	5 225	10 060	4 957	10 058
11	4 347	152	3 567	0	3 999	350	3 281	172
	4 665	1 485	5 288	1 000	4 957	1 224	5 467	1 076
12	4 879	– 256	4 957	0	4 571	– 400	4 737	– 165
	4 100	2 002	4 014	2 039	4 431	2 056	4 268	2 016
13	727	4 121	303	3 461	446	3 631	668	4 215
	4 814	3 119	5 349	3 015	5 225	3 000	4 740	3 153
14	3 165	389	3 591	698	3 094	772	2 754	486
	5 524	4 009	5 225	4 060	5 524	4 007	5 733	4 042
15	4 563	480	3 839	0	3999	350	4 182	146
	4 431	5 071	5 094	5 038	4 957	5 015	4 814	5 000
16	4 591	– 3 853	4 363	– 3 792	4 425	3 984	4 018	– 4 018
	– 2 181	6 033	– 2 696	6 022	– 2 286	6 008	– 2 896	6 045
17	– 3 297	3 793	– 2 774	4 272	– 3 179	4 376	– 3 008	3 850
	3 927	7 019	3 838	7 020	3 380	7 063	4 100	7 010

18	2 901	1 542	2 554	1 137	3 438	1 251	2 890	1 348
	5 467	8 005	5 733	8 035	5 225	8 047	5 524	8 000
19	−921	4 334	−668	4 215	−1 174	3 839	−903	3 911
	4 588	10 363	4 740	10 139	4 957	10 390	4 957	10 207
20	1 336	−4 984	1 265	−4 719	1 543	−4 238	873	−4 950
	3 749	10 025	4 100	10 000	4 510	10 063	3 927	10 028

Методические указания

В соответствии с алгоритмом метода Ньютона определяют начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}=[X^{(0)}, Y^{(0)}, Z^{(0)}]$. Например, можно принять (здесь $n=4$)

$$X^{(0)}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{pi};\quad Y^{(0)}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{pi};\quad Z^{(0)}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}z_{pi}. \qquad (3.69)$$

Далее производят уточнение корней. Для этого строят итерационный процесс определения $(k+1)$-го приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ по известному $\mathbf{x}^{(k)}$. Каждая итерация включает:

1) Решение системы уравнений методом Гаусса [11]:

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{h}=-\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Компоненты вектора-столбца $\mathbf{h}=[h_1;\ h_2;\ h_3]^T$ включают значения приращений $X_i^{(k+1)}-X_i^{(k)}$; $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ – матрица производных и вектор-столбец функций, вычисленные в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ по (3.66), (3.65), (3.58) и (3.61).

2) Вычисление $(k+1)$-го приближения:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{h}.$$

3) Проверку условия окончания итераций

$$\begin{cases}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|<\varepsilon;\\ k<k_{\max},\end{cases}$$

где ε – заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon=10^{-3}$ км); k_{max} – максимальное количество итераций (принять $k_{max}=50$).

Найденные в ходе навигационных определений прямоугольные геоцентрические координаты X, Y, Z (в системе ПЗ-90) должны быть преобразованы в геодезические координаты, часто используемые для решения различных задач: λ_z – долготу, φ_z – широту, H – высоту над уровнем эллипсоида, описывающего поверхность Земли. Связь между указанными координатами задается соотношениями (1.20), (1.21).

Для определения λ_z, φ_z, H по известным X, Y, Z решают систему нелинейных уравнений (1.20). В методе итераций решение основано на соотношениях вида (k – номер итерации):

$$N^{(k)}=\gamma\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_z^{(k-1)}}}+(1-\gamma)N^{(k-1)};$$

$$\varphi_z^{(k)}=\gamma\arcsin\left(\frac{Z}{(1-e^2)N^{(k)}+H^{(k-1)}}\right)+(1-\gamma)\varphi_z^{(k-1)}; \qquad (3.70)$$

$$H^{(k)}=\frac{Y}{\cos\varphi_z^{(k)}\sin\lambda_z^{(0)}}-N^{(k)}.$$

Алгоритм вычислений следующий.

1) Назначают начальные приближения $H^{(0)}=R-R_З$; $\varphi_z^{(0)}=\varphi$; $\lambda_z^{(0)}=\lambda$, где $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$; $R_З=6\,371$ км, а геоцентрическую широту и долготу φ и λ вычисляют по (2.54);

2) По (3.70) проводят итерационный процесс определения $\varphi_z^{(k)}$, $H^{(k)}$ до достижения заданной точности. Коэффициент γ вводится для расширения области сходимости алгоритма. Рекомендуется принять $\gamma=0{,}1$.

3.7 Навигационные характеристики спутниковых навигационных систем

Спутниковые навигационные системы представляют собой одно из наиболее динамично развивающихся приложений в космической отрасли. Благодаря своим характеристикам, современные СНС способны с высокой точностью определять координаты, величину и направление скорости, ориентацию объектов, находящихся в любой точке на поверхности Земли и околоземного пространства, где обеспечивается устойчивый и без больших искажений прием радиосигналов от достаточного количества навигационных космических аппаратов.

Области использования СНС обширны и разнообразны. Среди них можно выделить следующие:

– организация и мониторинг движения воздушного, наземного и водного транспорта, навигация космических объектов;

– геодезия и картография, контроль сейсмически опасных районов, геология и разведка полезных ископаемых;

– синхронизация шкал времени удаленных друг от друга объектов;

– экологический мониторинг.

Основу любой СНС составляет космическая группировка, включающая некоторое количество N навигационных космических аппаратов (НКА). Рассмотрим далее основные характеристики отдельных НКА и систем в целом.

Под *зоной обзора* НКА понимают участок земной поверхности, в каждой точке которого могут быть выполнены задачи навигационного обслуживания потребителей данным НКА в данный момент времени с учетом принятых ограничений. Центром зоны обзора является подспутниковая точка. Размер зоны обзора зависит от угла обзора бортовой аппаратуры, высоты полета, минимального угла места (*угла радиовидимости*) $\gamma_{пр}$, при котором решаются задачи обслуживания.

Зоной видимости потребителя (наземной станции) называют область пространства, находясь в которой НКА способен обеспечивать радиосвязь и передачу данных на приемную аппаратуру потребителя (станции).

Решение задачи определения местоположения потребителя требует нахождения в его зоне видимости в каждый момент времени некоторого минимально необходимого количества НКА (обычно полагают $n_{\min} = 4$). При нахождении в зоне видимости $n < n_{\min}$ аппаратов задача не решается вообще или решается частично. На этапе проектирования СНС параметры орбит, число и расположение НКА выбираются так, чтобы условие $n \geq n_{\min}$ выполнялось в любой момент времени в каждой точке.

Однако в процессе эксплуатации СНС при выходе из строя отдельных НКА структура орбитальной группировки нарушается, что приводит к невыполнению указанного условия в определенные интервалы времени. В этом случае важными характеристиками СНС является ее целостность, доступность и непрерывность обслуживания.

Целостность характеризует способность системы обнаруживать свое неправильное функционирование и исключать возможность использования ее данных потребителями при недопустимых отклонениях рабочих характеристик. Основной информацией для потребителей СНС являются данные о состоянии спутников и их неисправностях. Показатель целостности системы – это вероятность оповещения потребителей при нарушении работы системы в пределах допустимого временного периода.

Доступность в системах навигации означает возможность доведения до потребителей навигационных сообщений. На практике доступность оценивается как вероятность получения потребителем навигационной информации в заданный временной интервал и с требуемой точностью.

Показателями непрерывности обслуживания в заданной точке являются:

– усредненная на интервале наблюдения $T_H = t_K - t_0$ вероятность обслуживания в заданной точке, вычисляемая в виде отношения суммы интервалов времени T_i, когда выполняется условие $n \geq n_{\min}$, ко всему интервалу наблюдения T_H

$$P = \frac{\sum_i T_i}{T_н}; \qquad (3.71)$$

– вероятность p_d непрерывного обслуживания на интервале T_H;

– вероятность p_f отсутствия навигационных данных продолжительностью t_f на интервале T_H;

– максимальная на интервале T_H продолжительность $t_П$ отсутствия навигационных данных (максимальный перерыв обслуживания).

Обобщенные показатели непрерывности обслуживания СНС характеризуют вероятность обслуживания потребителей СНС, находящихся в заданной зоне обслуживания (ЗО). Приняв в качестве зоны обслуживания всю поверхность Земли, глобальными показателями непрерывности можно считать:

E – текущая вероятность обслуживания в ЗО в заданный момент времени t;

$\bar{E}$ – усредненная вероятность обслуживания в ЗО на заданном интервале наблюдения T_H;

P_d – вероятность непрерывного обслуживания в ЗО на интервале T_H;

P_f – вероятность отсутствия в ЗО навигационных данных продолжительностью t_f на интервале T_H;

$T_П$ – максимальная на интервале T_H продолжительность отсутствия навигационных данных в ЗО.

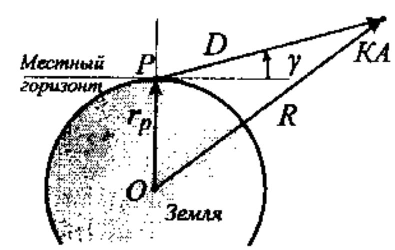
Важным показателем эффективности СНС являются характеристики точности определения координат и составляющих скорости потребителей. Такой характеристикой, например, служит величина σ_i – СКО определения i-го параметра движения.

Введенные показатели эффективности можно использовать как для оценивания текущей эффективности СНС, так и для решения различных задач оптимизации орбитальной группировки.

На рис. 3.6 иллюстрируется определение условий видимости НКА для потребителя, расположенного в точке P. Пусть в геоцентрической СК известны координаты центра масс КА X, Y, Z, а также координаты потребителя x_p, y_p, z_p. Угол места НКА γ находят из соотношений

$$\begin{cases} D = \sqrt{(X - x_p)^2 + (Y - y_p)^2 + (Z - z_p)^2}; \\ \gamma = \arccos \dfrac{r_p^2 + D^2 - R^2}{2 r_p D} - \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad (3.72)$$

где R и r_p – величины радиус-вектора НКА и точки P соответственно.



R – радиус-вектор КА; D – наклонная дальность; γ – угол места

Рис.3.6. К определению условий видимости КА

Далее считается, что НКА находится в зоне видимости потребителя P, если угол места $\gamma > \gamma_{пр}$. Часто расчет ведется при $\gamma_{пр} = 5 \ldots 10^\circ$, однако во многих случаях значение $\gamma_{пр} = 20^\circ$ ближе к реальным условиям эксплуатации. Выбор того или иного значения для конкретного потребителя зависит от местных условий (рельефа местности и наличия других помех).

На основе алгоритма, приведенного в подразделе 2.4, рассчитывают геоцентрические координаты всех НКА, образующих орбитальную группировку, и определяют количество НКА, находящихся в зоне видимости потребителя. Расчет повторяют в заданном интервале наблюдения $T_H = t_K - t_0$ с некоторым шагом дискретности по времени Δt. В результате определяют вероятность обслуживания потребителя в заданной точке по формуле (3.71) и другие показатели, например, моменты входа НКА в зону видимости и выхода из этой зоны, продолжительность видимости отдельных НКА.

Также по результатам расчета можно построить график зависимости количества видимых НКА от времени. Например, график видимости НКА, приведенный на рис. 3.7, включает два интервала T_1 и T_2, в течение которых выполняется необходимое условие обслуживания $n \geq n_{\min}$. В рассмотренном случае вероятность обслуживания в точке $P = \frac{T_1 + T_2}{T_H}$. Максимальный перерыв обслуживания равен $t_П$.

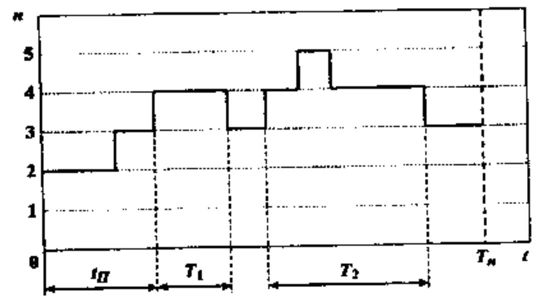


Рис. 3.7. График видимости НКА

Для вычисления значений обобщенных показателей эффективности разобьем поверхность Земли на элементарные площадки меридианами, угловое расстояние между которыми составляет $d\lambda$, и параллелями, угловое расстояние между которыми составляет $d\varphi$. Площадь S_{ij} элементарной площадки, имеющей координаты центра (точки расположения потребителя)

$$\varphi_i = -\frac{\pi}{2} - \frac{d\varphi}{2} + i\,d\varphi; \quad \lambda_j = -\pi - \frac{d\lambda}{2} + j\,d\lambda, \quad i = 1, \ldots, N_f, \quad j = 1, \ldots, N_l,$$

составит $S_{ij} = r_p^2 \cos\varphi_i \, d\varphi \, d\lambda$.

Тогда для текущей вероятности обслуживания во всей ЗО в заданный момент времени запишем выражение

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_l} S_{ij}^{эфф}}{S}, \qquad (3.73)$$

где $S_{ij}^{эфф}$ – элементарные площадки, на которых выполняется условие $n \geq n_{\min}$; S – общая площадь ЗО.

Усредненная вероятность обслуживания в ЗО на заданном интервале наблюдения T_H может быть определена следующим образом

$$\bar{E} = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} E^{(k)}}{N_t}, \qquad (3.74)$$

где $E^{(k)}$ рассчитывается по формуле (3.73) для момента времени $t^{(k)} = t_0 + k\,\Delta t, \quad k = 1, \ldots, N_t$, принадлежащего интервалу наблюдения T_H.

Далее предположим, что «важность» обслуживания потребителей, находящихся в различных точках ЗО, неодинакова. Тогда, поставив в соответствие элементарной площадке S_{ij} весовой коэффициент w_{ij}, вместо выражения (3.73) запишем более общее соотношение

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_l} w_{ij} S_{ij}^{эфф}}{S \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_l} w_{ij}}. \qquad (3.75)$$

Значения коэффициентов w_{ij} зависят от исходной постановки навигационной задачи.

3.8 Орбитальная группировка спутниковой навигационной системы ГЛОНАСС

В состав СНС ГЛОНАСС входят: орбитальная группировка, сеть наземных станций наблюдения за их работой и пользовательский сегмент (навигационные приемники). Все спутники ГЛОНАСС являются автономными. Параметры их орбит периодически контролируются сетью наземных станций слежения, с помощью которых (не реже 1-2 раз в сутки) вычисляются орбитальные характеристики, регистрируются отклонения НКА от расчетных траекторий движения и определяется собственное время бортовых часов.

Навигационное сообщение, входящее в состав излучаемого НКА радиосигнала, содержит:

- время начала кадра (метку времени) t_0;
- эфемеридную информацию: координаты x_i, y_i, z_i и производные от координат $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ передающей антенны НКА в прямоугольной геоцентрической СК ПЗ-90 на момент времени t_0;
- данные о состоянии и параметры орбит всех НКА (альманах системы) на момент времени t_0;
- частотно-временные поправки, которые учитывают погрешности передаваемой НКА информации и прогнозируют условия и скорость распространения радиосигналов в атмосфере, что помогает аппаратуре потребителя минимизировать погрешности решения навигационной задачи.

Полная (проектная) орбитальная группировка системы ГЛОНАСС состоит из 24-х спутников, находящихся на круговых орбитах с высотой около 19 100 км, наклонением 64,8 градуса и периодом обращения 11 часов 15 минут в трех орбитальных плоскостях. Орбитальные плоскости разнесены по долготе восходящего узла на 120 градусов и имеют условные номера 1, 2 и 3, возрастающие по Земли направлению вращения.

В каждой орбитальной плоскости расположено по 8 спутников с равномерным сдвигом по аргументу широты 45 градусов. Спутники во 2-й и 3-й орбитальных плоскостях смещены на 15 градусов по аргументу широты относительно спутников в предыдущих плоскостях. Нумерация точек расположения спутников производится по порядку их следования на орбите против их движения (рис. 3.8). Спутникам 1-й орбитальной плоскости присвоены номера 1…8, 2-й орбитальной плоскости – 9…16, 3-й орбитальной плоскости – 17…24. Интервал повторяемости трасс движения НКА составляет 17 витков или 7 сут 23 ч 27 мин 28 с.

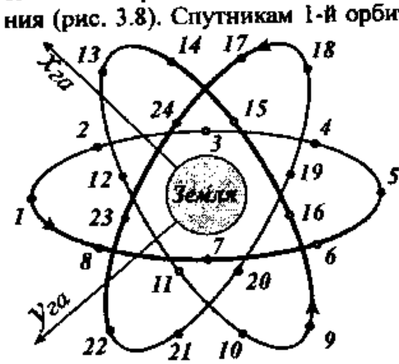


Рис. 3.8. Схема расположения НКА орбитальной группировки СНС ГЛОНАСС

Такая конфигурация орбитальной группировки позволяет обеспечить непрерывную наблюдаемость не менее четырех спутников во всех точках земной поверхности и околоземного пространства, а также обеспечить необходимую точность навигационных измерений. Система сохраняет полную функциональность при одновременном выходе из строя до 6 НКА (по два в каждой плоскости).

По данным [25], на 12 февраля 2007 г. орбитальная группировка ГЛОНАСС насчитывала лишь 10 НКА, состояние ОГ на указанную дату приведено в табл. 3.2.

Табл. 3.2. Состояние орбитальной группировки СНС ГЛОНАСС

Номер ГЛОНАСС	Номер плоскости/точки	Дата ввода в систему	Состояние спутника
796	1/01	06.02.05	В системе
794	1/02	02.02.04	В системе
795	1/04	29.01.04	В системе
701	1/06	08.12.04	В системе
797	1/08	06.02.05	В системе
717	2/10	–	На этапе ввода в эксплуатацию
715	2/14	–	На этапе ввода в эксплуатацию
716	2/15	–	На этапе ввода в эксплуатацию
783	3/18	05.01.01	В системе
798	3/19	22.01.06	В системе
792	3/21	31.01.03	В системе
714	3/23	31.08.06	В системе
713	3/24	31.08.06	В системе

Недостаток НКА в орбитальной группировке обусловлен сравнительно малым сроком активного существования спутников (3-5 лет), а также несвоевременной заменой выведенных из системы аппаратов. Этот недостаток делает актуальной задачу исследования эффективности функционирования СНС, а также задачу оптимизации орбитальной группировки.

Так как бортовой запас топлива ограничен, изменение действующей конфигурации орбитальной группировки за счет перевода НКА в другую точку до-

пускается только в крайнем случае, для оптимизации навигационных определений или обеспечения совместимости работы приемно-передающей аппаратуры соседних спутников.

Выведение новых НКА на орбиту осуществляется по групповой схеме: до трех спутников одновременно выводятся в одну орбитальную плоскость. Схема выведения состоит из следующих этапов:

- выведение полезной нагрузки (всех НКА) на промежуточную круговую орбиту высотой около 200 км, лежащую в плоскости конечной целевой орбиты;
- компланарный переход на конечную орбиту;
- постановка спутников в заданные системные точки с использованием дополнительных межорбитальных маневров.

Из-за ограниченности расходов топлива последний этап может занять до одного месяца.

Задача 3.11 *(выполняется с использованием ЭВМ)*. Используя приведенные выше данные об орбитальной группировке ГЛОНАСС, разработать и реализовать на ЭВМ алгоритмы, решающие следующие задачи:

а) Построение на заданном интервале времени графика видимости навигационных КА в точке на поверхности Земли с заданными геодезическими координатами.

б) Вычисление по формуле (3.71) усредненной на интервале наблюдения вероятности обслуживания пользователя в заданной точке.

в) Вычисление по (3.73) текущей вероятности обслуживания пользователей на всей поверхности Земли в заданный момент времени.

Указание. Принять, что орбиты НКА – круговые, имеющие радиус (19100 + 6371) км; при определении координат НКА использовать формулы (2.52) и программу для выполнения расчета на ЭВМ к лабораторной работе «Расчет трассы ИСЗ» (подраздел 2.4).

3.8 Методы решения навигационных задач СНС

Навигационной задачей в СНС называют нахождение пространственно-временных координат потребителя, его вектора скорости и ориентации. В результате решения задачи в общем случае должны быть найдены пространственные координаты потребителя (X, Y, Z), поправка δt к шкале времени потребителя относительно системного времени СНС и составляющие вектора скорости. Иногда требуется найти углы, определяющие пространственную ориентацию протяженного объекта.

Зная время отправки и частоту λ_i сигнала, передаваемого i-м НКА, потребитель может определить задержку сигнала τ_i, которой соответствует дальность до i-го НКА $D_i = c\tau_i$ (c – скорость света), и доплеровское смещение частоты f_{di}, которому соответствует радиальная скорость сближения $V_{ri} = f_{di}\,\lambda_i$.

При отклонении шкалы времени потребителя относительно системного времени СНС на величину δt возникает погрешность измерения дальности $\delta D = c\delta t$. Величину δt можно считать постоянной на сеансе проведения измерений и одинаковой для всех НКА. Фактически при измерении дальности до i-го НКА получают *псевдодальность* D_i', отличающуюся от истинной дальности D_i на δD. Аналогично уравнениям (3.16), для псевдодальностей запишем следующую систему уравнений

$$(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2 + c\delta t = D_i'^2, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.76}$$

в которой имеется четыре неизвестных (X, Y, Z, δt). Следовательно, для решения системы (3.76) необходимо измерить псевдодальности, как минимум, до четырех НКА. При этом, как и при решении системы (3.16), возникает пространственная неоднозначность, которую стараются исключать при помощи априорного знания или предвычисления координат. Определение в результате решения (3.76) величины δt позволяет потребителю синхронизировать свою шкалу времени с системным временем СНС. Благодаря этой возможности значительно упрощается аппаратура потребителя.

Иногда в зоне видимости потребителя оказывается более 4-х НКА. В первых образцах аппаратуры потребителя решалась задача выбора созвездия из 4-х НКА, минимизирующего погрешность решения навигационной задачи. В современной аппаратуре обычно решается переопределенная система (3.76) для $n > 4$. При этом используется итерационный метод взвешенных наименьших квадратов [21], когда на k-ой итерации решение ищется на основе соотношения

$$\mathbf{\eta}^{(k)} = \mathbf{\eta}^{(k-1)} + \left(\mathbf{H}_{\Gamma M}^T \mathbf{R}_D^{-1} \mathbf{H}_{\Gamma M}\right)^{-1} \mathbf{H}_{\Gamma M}^T \mathbf{R}_D^{-1} \left(\mathbf{D}' - \mathbf{D}'^{(k-1)}\right), \tag{3.77}$$

где $\mathbf{\eta} = [X, Y, Z, \delta t]^T$ – матрица-столбец неизвестных; $\mathbf{D}' = [D_1', D_2', \dots, D_n']^T$ – матрица-столбец, включающая измеренные псевдодальности; $\mathbf{D}'^{(k-1)}$ – приближение к $\mathbf{D}'$ на k-ой итерации, полученное с использованием $\mathbf{\eta}^{(k-1)}$. Матрица $\mathbf{H}_{\Gamma M}$ образуется частными производными $\dfrac{\partial \mathbf{D}'^{(k-1)}}{\partial \mathbf{\eta}^{(k-1)}}$; $\mathbf{R}_D$ – ковариационная матрица шумов измерений $\mathbf{D}'$ или весовая матрица, используемая для обработки неравноточных измерений.

Найденные таким образом декартовы геоцентрические координаты потребителя в дальнейшем преобразуются в геодезические координаты посредством соотношений (1.20), (1.21).

Точностные характеристики СНС определяются уровнем основных ошибок, сопутствующих навигационным определениям, количеством видимых НКА, взаимным расположением НКА и потребителя. Основными источниками ошибок являются:

– *Погрешности, связанные с распространением радиоволн в ионосфере.* Задержки распространения сигналов при их прохождении через верхние слои атмосферы приводят к ошибкам местоопределения. Несмотря на то, что навигационное сообщение, передаваемое с борта НКА, содержит параметры модели ионосферы, компенсация фактической задержки составляет не более 50%. Компенсировать указанные ошибки можно при использовании сигналов, принимаемых на двух разных частотах.

– *Погрешности, обусловленные распространением радиоволн в тропосфере.* Возникают при прохождении радиоволн через нижние слои атмосферы.

– *Эфемеридная погрешность.* Ошибки обусловлены расхождением между фактическим положением НКА и его расчетным положением, которое устанавливается по данным навигационного сообщения.

– *Погрешность ухода шкалы времени спутника* обусловлена расхождением шкал времени различных спутников. Устраняется с помощью наземных станций слежения или применением специальных алгоритмов обработки информации в аппаратуре потребителя.

– *Погрешность определения расстояния до спутника.* Данный показатель является статистическим, он вычисляется для конкретного спутника и заданного интервала времени.

В соответствии с данными [21], для полнофункциональной СНС с вероятностью 0,997 общие ошибки (3 СКО) определения навигационных параметров составляют: по координатам в плане – 60 м, по высоте – 75 м, по скорости – 0,15 м/с, по времени – 1 мкс.

Составляющие скорости потребителя определяются решением аналогичных нелинейных уравнений на основе измеренных значений V_{ri}. В простейшем случае здесь достаточно знать скорости сближения с тремя НКА. Вычитая из V_{ri} радиальную скорость движения i-го НКА, можно найти значения радиальной скорости движения потребителя в направлении i-го НКА $\dot{D}_i$, $i = 1, 2, 3$ и далее воспользоваться алгоритмом на основе решения уравнений (3.43).

Одной из важных задач, решаемых при помощи СНС, является определение пространственной ориентации протяженного объекта (морского судна, летательного аппарата и т.п.). Рассмотрим один из методов решения задачи.

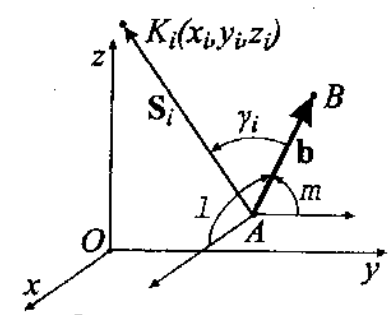


Рис. 3.9. Определение ориентации объекта в пространстве

В двух точках A и B объекта, разнесенных друг от друга на возможно большее расстояние, устанавливают приемники сигналов СНС (рис. 3.9). Положение вектора $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ относительно объекта и величина измерительной базы $b = |AB|$ фиксированы. Требуется определить направление вектора $\mathbf{b}$ в геоцентрической СК $Oxyz$; т.е. найти направляющие косинусы l, m, n углов, которые образует вектор $\mathbf{b}$ с осями Ox, Oy и Oz.

Приемники A и B синхронно измеряют дальности D_{ai} и D_{bi} до i-го НКА, а также разность фаз $\Delta\varphi_i$ сигналов, принимаемых в точках A и B. Заметим, что имеет место соотношение

$$\Delta\varphi_i = 2\pi(D_{ai} - D_{bi})/\lambda_i. \tag{3.78}$$

Разность фаз связана с углом γ_i между вектором $\mathbf{b}$ и вектором $\mathbf{S}_i = \overline{AK_i}$, направленным в точку расположения i-го НКА, соотношением $\cos\gamma_i = \Delta\varphi_i\lambda_i / 2\pi b$.

Величина $b\cos\gamma_i$ представляет скалярное произведение вектора $\mathbf{b} = [bl;\ bm;\ bn]^T$ и единичного вектора направления на НКА $\mathbf{s}_i = \dfrac{\mathbf{S}_i}{S_i} = [\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i]^T$ (предполагается, что размеры объекта много меньше расстояния до НКА). После решения основной навигационной задачи по определению координат и скорости движения объекта величины ξ_i, η_i, ζ_i можно считать известными с достаточной точностью. Итак, имеем соотношение для определения неизвестных l, m и n

$$\cos\gamma_i = \xi_i l + \eta_i m + \zeta_i n. \tag{3.79}$$

Для определения направления базы $\mathbf{b}$ необходимо провести серию измерений дальностей до двух НКА, найти разности фаз $\Delta\varphi_i$ и соответствующие величины $\cos\gamma_i$, $i = 1, 2$ и затем решить систему уравнений, включающую два уравнения (3.79) и уравнение связи $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Решение указанной системы уравнений может приводить к некоторым затруднениям, которые снимаются, если использовать возможность измерения сдвига фаз по трем НКА и находить решение, используя три линейных уравнения вида (3.79).

Необходимо также учесть, что разности фаз $\Delta\varphi_i$ измеряются с точностью до величины $2\pi k_{ij}$, где k_{ij} – заранее неизвестные целые числа, подлежащие определению. Задача определения полной фазы $2\pi k_{ij}$ может быть решена с использованием соотношения (3.78), поскольку разность дальностей D_{bi} и D_{ai} приблизительно известна по результатам навигационных определений.

Для полного определения ориентации объекта в пространстве необходимо найти направления двух неколлинеарных векторов баз.

После определения единичного вектора направления j-ой базы в геоцентрической СК $\mathbf{e}_j = [l_j;\ m_j;\ n_j]^T$ в дальнейшем могут быть найдены составляющие этого вектора в местной топоцентрической СК с применением матрицы перехода (1.4), а также составляющие в начальной стартовой СК – с применением матрицы (1.5).

Определение углов ориентации летательного аппарата – тангажа (ϑ), рысканья (ψ) крена (γ) – основано на использовании соотношения между составляющими вектора $\mathbf{e}_j$ в начальной стартовой $[l_{нj};\ m_{нj};\ n_{нj}]^T$ и в связанной $[l_{cвj};\ m_{cвj};\ n_{cвj}]^T$ системах координат. Запишем

$$\begin{bmatrix} l_{cвj} \\ m_{cвj} \\ n_{cвj} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{нсв} \begin{bmatrix} l_{нj} \\ m_{нj} \\ n_{нj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \tag{3.80}$$

где матрица перехода $\mathbf{A}_{нсв}$ определяется по (1.8). Поскольку компоненты $[l_{cвj};\ m_{cвj};\ n_{cвj}]^T$ однозначно определены размещением антенн относительно корпуса ЛА, то подстановка в соотношения (3.80) найденных в результате измерений $[l_{нj};\ m_{нj};\ n_{нj}]^T$ превращает (3.80) в избыточную систему из шести уравнений для определения трех неизвестных (ϑ, ψ и γ). Решение этой системы может быть получено, например, с использованием нелинейного метода наименьших квадратов. В простейшем случае можно использовать любые три линейно независимых уравнения из системы (3.80) (например, первое, второе и четвертое).

Задача 3.12 Из навигационного сообщения известны координаты и скорости НКА в геоцентрической СК, или вектор параметров $[x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]^T$. Найден также вектор координат потребителя $\boldsymbol{\eta} = [X, Y, Z]^T$. Найти соотношения и составить алгоритм определения компонент вектора скорости НКА в топоцентрической СК, связанной с потребителем, и радиальной скорости движения НКА в направлении потребителя.

4 ВХОД В АТМОСФЕРУ И ПОСАДКА

4.1 Условия входа КА в атмосферу

Наиболее характерной задачей о входе в атмосферу Земли является задача о возвращении КА с околоземной орбиты. *Точкой схода* КА с орбиты называется точка, в которой включается тормозная двигательная установка для уменьшения орбитальной скорости до требуемой для снижения. Пренебрегая протяженностью активного участка, траекторию спуска можно условно разбить на два участка: *внеатмосферного* и *атмосферного*. Точка пересечения траектории спуска с границей плотных слоев атмосферы называется *точкой входа*, а параметры движения КА в этот момент называются *параметрами входа*. В приближенных проектировочных расчетах в качестве границы плотных слоев атмосферы принимается то значение высоты h_{am}, на которой аэродинамические силы становятся соизмеримыми с силой притяжения (например, составляют 1/10 от силы притяжения). Ясно, что значение h_{am} зависит от соотношения массы и геометрических параметров КА. В простейшем случае используют так называемую *условную границу атмосферы*, принимаемую на высоте 100-120 км (для Земли).

Основная специфика задачи связана с атмосферным участком. На этом участке должен быть погашен избыток потенциальной и кинетической энергии КА. Гашение энергии осуществляется пассивным торможением – с использованием только аэродинамических сил, при этом механическая энергия КА практически полностью переходит в тепловую энергию. Таким образом, торможение в атмосфере приводит к значительным механическим нагрузкам на конструкцию КА и нагреву его оболочки. Избыток механической энергии одного килограмма груза при спуске с орбиты составляет около $30 \cdot 10^6$ Дж, что достаточно для нагрева материала этого груза на несколько тысяч градусов и полного его разрушения. Чтобы не допустить этого, особое значение имеет задача выбора рациональной траектории с учетом ограничений по величинам тепловых потоков, перегрузкам, рассеиванию точек посадки и т.д. Поэтому при расчете атмосферного участка КА должны быть найдены все эти характеристики траектории.

Одним из главных факторов, определяющих траекторию полета в атмосфере, является скорость входа. По ее величине можно классифицировать следующие случаи:

- вход с околокруговой скоростью (при спуске с низких орбит);
- вход с околопараболической скоростью (при спуске с высоких орбит или возвращении от Луны);
- вход с гиперболическими скоростями (при возвращении от планет Солнечной системы).

Величина скорости входа, а также имеющиеся ограничения на параметры траектории определяют выбор характеристик КА, основными из которых являются располагаемое (максимальное) аэродинамическое качество $K = \dfrac{C_y}{C_x}$, а также баллистический параметр

$$\sigma_x = \frac{C_x S}{G_0}, \tag{4.1}$$

где $G_0 = mg_0$ – сила притяжения, действующая на КА вблизи поверхности Земли.

Эти параметры определяют соотношение между аэродинамическими и массовыми силами на атмосферном участке, выражаемое перегрузками

$$n_x = \frac{X}{G_0} = \sigma_x q; \quad n_y = \frac{Y}{G_0} = K\sigma_x q;$$
$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{1 + K^2}\sigma_x q. \tag{4.2}$$

Здесь силы X и Y задаются выражением (1.26).

В общем случае значения σ_x и K меняются вдоль траектории, однако при предварительном анализе возможных траекторий их можно считать постоянными.

Классификация типов КА и реализуемых ими траекторий на атмосферном участке производится по величине располагаемого аэродинамического качества, предоставляющего возможность управления траекторией. Обычно выделяют:

- баллистическую траекторию аппарата, не обладающего аэродинамическим качеством ($K = 0$);
- траекторию «скользящего» типа для аппарата с малым аэродинамическим качеством ($K = 0{,}2 \div 0{,}5$);
- траекторию «планирующего» типа для аппарата с большим аэродинамическим качеством ($K > 1$).

Аппарат баллистического спуска представляет собой осесимметричную капсулу, что определяет осесимметричное обтекание его поверхности воздушным потоком. К аппаратам такого типа относятся и КА с регулируемой величиной аэродинамического сопротивления. Преимущество баллистического спуска заключается в простоте реализации, отсутствии необходимости стабилизации движения относительно центра масс. К недостаткам – большие перегрузки и тепловые потоки (при больших углах входа в атмосферу), а также большой разброс возможных точек посадки (при меньших значениях θ_{ax}). Даже при близких к оптимальным значениях $\theta_{ax} = -1^\circ \div -2^\circ$ максимальная перегрузка оказывается не меньше восьми единиц, а рассеивание точек посадки составляет сотни километров.

Аппараты скользящего типа не имеют специальных устройств для создания подъемной силы, которая возникает за счет несимметричного обтекания воздушным потоком корпуса КА. На рис. 4.1 изображен аппарат типа «фара»; несимметричность его обтекания обеспечивается надлежащим отклонением центра масс аппарата от продольной оси на величину CC'. Возникающий аэродинамический момент разворачивает аппарат вокруг боковой оси, при этом возникает отрицательный угол атаки $\alpha_{бал}$, на котором полный аэродинамический момент относительно центра масс равен нулю. Плоскость угла атаки, проходящая через ось геометрической симметрии и центр масс КА, содержит главный вектор аэродинамических сил $\mathbf{R}_a$. Силы на балансировочном угле атаки $\alpha_{бал}$ изображены на рис. 4.1. Центр давления находится позади центра масс, поэтому движение КА оказывается устойчивым по углу тангажа (с постоянным углом атаки $\alpha_{бал}$) и нейтральным по крену.

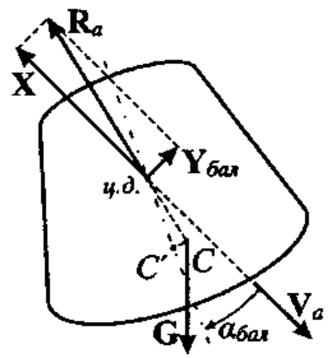


Рис.4.1. Схема сил, действующих на балансировочном угле атаки, для аппарата типа «фара»

Управление движением аппарата производится путем изменения его угла крена γ, которое приводит к повороту плоскости угла атаки. Составляющие аэродинамической силы будут иметь вид

$$X = C_x qS = \sigma_x qG_0;$$
$$Y_{эф} = Y_{бал}\cos\gamma = C_y qS\cos\gamma = K\sigma_x qG_0\cos\gamma; \quad (4.3)$$
$$Z = Y_{бал}\sin\gamma = C_y qS\sin\gamma = K\sigma_x qG_0\sin\gamma,$$

где $Y_{эф}$ – проекция полной подъемной силы $Y_{бал}$ на продольную плоскость движения; Z – проекция силы $Y_{бал}$ на поперечную плоскость. Как правило, непрерывным изменением модуля угла крена и соответствующей величины $Y_{эф}$ управляют продольным движением КА. Боковой промах устраняется путем выполнения «перекладок» – быстрого изменения в рассчитанные моменты времени знака угла крена. Ясно, что при управлении КА необходимо минимизировать общее число перекладок и уменьшить возмущения, оказываемые перекладками на продольное движение КА.

Аппараты скользящего типа, управляемые по крену, обеспечивают приемлемые значения параметров траектории при входе с околокруговой или околопараболической скоростью. При бóльших скоростях входа используют более сложные схемы посадки и алгоритмы управления [23]. Кроме того, в этих условиях могут быть использованы аппараты планирующего типа, в которых большая подъемная сила создается за счет применения несущих плоскостей (крыльев). Такие аппараты предоставляют наиболее широкие возможности управления траекторией.

4.2 Расчет внеатмосферного участка траектории

Задачей расчета является определение параметров входа по заданным параметрам тормозного импульса, либо обратная задача, имеющая большее практическое значение: нахождение точки схода, величины и направления тормозного импульса, обеспечивающих заданные параметры входа. В последнем случае может быть решена и задача оптимизации. Одной из задач оптимизации является минимизация расхода топлива для совершения маневра с учетом имеющихся ограничений, наиболее важным из которых часто является обеспечение заданного угла входа $\theta_{вх}$, от которого существенно зависят режимы движения в атмосфере. Задача расчета внеатмосферного участка аналогична задаче о маневрировании КА; наиболее просто она решается в импульсной постановке в предположении центральности поля тяготения Земли и использовании условной границы атмосферы $r_{am} = h_{am} + R_з$. Решение этой задачи может быть получено с использованием соотношений задачи двух тел.

Предположим, что импульсное торможение осуществляется в заданной точке начальной орбиты, что позволяет найти параметры движения КА r_0, V_0, θ_0 перед торможением (этом параграфе, в отличие от остального изложения, для большей геометрической наглядности траекторный угол θ вводится так, что его положительные значения соответствуют движению с уменьшением высоты). Пусть тормозной импульс $\Delta\mathbf{V}$ составляет с вектором V_0 угол χ, отсчитываемый от направления, противоположного V_0 (рис. 4.2). Скорость КА после приложения импульса составит $V_1 = V_0 + \Delta\mathbf{V}$. Из векторного треугольника определим новую величину скорости

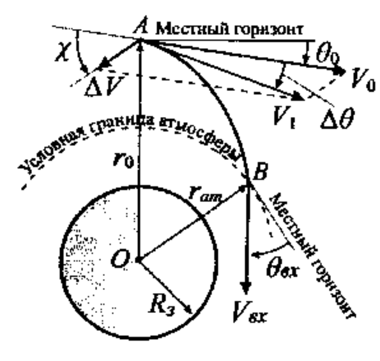


Рис. 4.2. Схема движения КА на внеатмосферном участке

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0\Delta V\cos\chi}. \quad (4.4)$$

Изменение угла наклона траектории определяется соотношениями

$$\sin\Delta\theta = \frac{\Delta V\sin\chi}{V_1};$$
$$\cos\Delta\theta = \frac{V_0 - \Delta V\cos\chi}{V_1}. \quad (4.5)$$

В дальнейшем будем предполагать выполнение условия $V_0 - \Delta V\cos\chi > 0$, т.е. направление движения не изменяется на противоположное, и тогда $\Delta\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Запишем интегралы энергии (2.2) и площадей (2.4), связывающие значения параметров траектории в точке схода (точка A) после приложения импульса (V_1; $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta$) со значениями в точке входа в атмосферу (точка B)

$$\frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{V_{\text{вх}}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{am}}; \tag{4.6}$$

$$V_1 r_0 \cos\theta_1 = V_{\text{вх}} r_{am} \cos\theta_{\text{вх}}.$$

Разрешая эти соотношения относительно $V_{\text{вх}}$, $\theta_{\text{вх}}$, получим

$$V_{\text{вх}} = \sqrt{V_1^2 + \xi}; \tag{4.7}$$

$$\cos\theta_{\text{вх}} = \bar{r}\frac{V_1 \cos\theta_1}{\sqrt{V_1^2 + \xi}}, \tag{4.8}$$

где $\xi = \frac{2\mu}{r_0}(\bar{r} - 1)$; $\bar{r} = \frac{r_0}{r_{am}}$.

Используя (4.5), найдем

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_0 \cos\Delta\theta - \sin\theta_0 \sin\Delta\theta =$$

$$= \frac{1}{V_1}\left[V_0 \cos\theta_0 - \Delta V \cos\theta_0 \cos\chi - \Delta V \sin\theta_0 \sin\chi\right] =$$

$$= \frac{1}{V_1}\left[V_0 \cos\theta_0 - \Delta V \cos(\theta_0 - \chi)\right].$$

Подставив последний результат в (4.8) и используя (4.4), получим явное выражение угла входа через параметры орбитального движения в точке схода и параметры тормозного импульса

$$\cos\theta_{\text{вх}} = \bar{r}\frac{V_0 \cos\theta_0 - \Delta V \cos(\chi - \theta_0)}{\sqrt{V_0^2 + \Delta V^2 - 2V_0 \Delta V \cos\chi + \xi}}. \tag{4.9}$$

Это выражение может быть положено в основу решения задачи оптимизации – определения оптимальной ориентации вектора тормозного импульса и оптимальной точки схода, обеспечивающих максимальный угол входа. В силу обратимости решение такой задачи позволяет найти минимальную величину импульса скорости для заданного угла входа. Параметры орбитального движения r_0, V_0, θ_0, используемые в (4.9), при заданной начальной орбите являются функциями истинной аномалии η:

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\eta}; \quad \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{e\sin\eta}{1 + e\cos\eta};$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\eta}. \tag{4.10}$$

Поэтому необходимые условия достижения максимального значения $\theta_{\text{вх}}$ (или минимального значения $\cos\theta_{\text{вх}}$) записываются в виде

$$\frac{\partial\cos\theta_{\text{вх}}}{\partial\chi} = 0; \quad \frac{\partial\cos\theta_{\text{вх}}}{\partial\eta} = 0. \tag{4.11}$$

Решение этой задачи показывает [23], что если отношение $\bar{r} = \frac{r_\alpha}{r_{am}}$ не слишком близко к единице, т.е. высота апогея исходной орбиты заметно превышает высоту границы атмосферы, то оптимальным является импульс, приложенный в апогее траектории ($\eta = \pi$), и направленный против вектора скорости ($\chi = 0$). В случае $\bar{r} \approx 1$ оптимум достигается при $\eta \neq \pi$; $\chi \neq 0$.

Дальность внеатмосферного участка и время движения подсчитываются с использованием соотношений задачи двух тел.

Реальная задача оптимизации оказывается сложнее: так как обычно район посадки КА фиксирован, то приходится учитывать ограничения, накладываемые этим обстоятельством, на выбор точки схода. Для неэкваториальной начальной орбиты вследствие вращения Земли необходимо определить также момент начала торможения (номер витка), минимизирующий промах по географической долготе. Ограничения оказываются менее жесткими при наличии возможности продольного и бокового маневра на атмосферном участке.

Задачи

4.1 Для случая круговой начальной орбиты радиуса r_0 получить выражение для оптимального угла χ, обеспечивающего наибольший по модулю угол входа, считая заданными величины ΔV и r_{am}.

4.2 Для случая круговой начальной орбиты радиуса r_0 и известного отношения $\bar{r} = \frac{r_0}{r_{am}}$ определить величину тормозного импульса ΔV, направленного против вектора скорости и обеспечивающего заданный угол входа. Найти также значение $V_{\text{вх}}$.

4.3 Уравнения движения КА в атмосфере

Рассмотрим движение КА в атмосфере относительно Земли при следующих допущениях:

- поле притяжения Земли является центральным;
- КА принимается за материальную точку массой m; его движение относительно центра масс не рассматривается;
- Земля не вращается; атмосфера неподвижна;
- тяга двигателей КА отсутствует.

Векторное уравнение движения КА имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R}_a + \mathbf{G} = \mathbf{F}_\Sigma, \tag{4.12}$$

где $\mathbf{R}_a$ и $\mathbf{G}$ – векторы аэродинамической силы и силы тяжести.

Это уравнение удобно рассматривать в проекциях на оси скоростной системы координат, вектор скорости вращения которой представлен компонентами $\boldsymbol{\omega}_c = [\omega_x;\ \omega_y;\ \omega_z]_c^T$ (здесь, как и ранее, нижний индекс у вектора указывает на систему координат, в которой рассматриваются проекции данного вектора). В этой системе полная производная вектора скорости определяется соотношением (1.46). Получаем уравнения движения в проекциях

$$m\left(\frac{dV_x}{dt}+\omega_y V_z-\omega_z V_y\right)=F_x;$$
$$m\left(\frac{dV_y}{dt}+\omega_z V_x-\omega_x V_z\right)=F_y; \qquad (4.13)$$
$$m\left(\frac{dV_z}{dt}+\omega_x V_y-\omega_y V_x\right)=F_z,$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы $\mathbf{F}_\Sigma$ на соответствующие оси.

В скоростной системе координат $Cxyz$ ось Cx направлена вдоль вектора скорости, ось Cy перпендикулярна вектору скорости и лежит в местной вертикальной плоскости, образованной векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$, ось Cz образует правую тройку. В этой системе вектор скорости $\mathbf{V}$ имеет вид $\mathbf{V}_c = [V;\ 0;\ 0]^T$, где V – полная скорость. С учетом этого представления перепишем (4.13) в виде

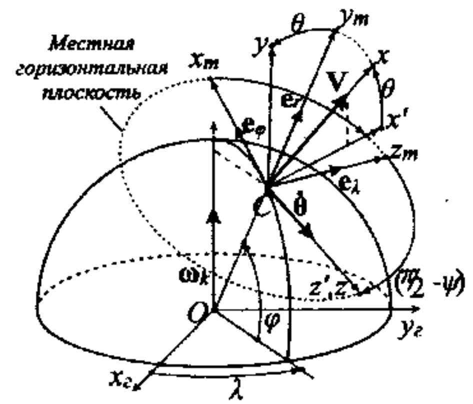


Рис. 4.3. Положение горизонтальной топоцентрической системы координат $Cx_my_mz_m$ и скоростной системы координат $Cxyz$

$$m\frac{dV}{dt}=F_x;$$
$$m\omega_z V=F_y; \qquad (4.14)$$
$$-m\omega_y V=F_z.$$

Найдем далее компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}_c$ и получим некоторые кинематические соотношения [19].

Положение центра масс КА будем задавать величиной r его радиус-вектора и двумя углами – долготой λ и геоцентрической широтой φ. Поместим в центр масс КА горизонтальную топоцентрическую систему координат $Cx_my_mz_m$, оси которой направлены вдоль единичных ортов $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\lambda$ – касательных к координатным линиям φ, r, λ в точке C (рис. 4.3). Направление вектора скорости в системе $Cx_my_mz_m$ определяется двумя углами: местным траекторным углом θ и курсовым углом ψ, который измеряется между касательной к местной параллели (осью Cz_m) и проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость. Переход от системы

$Cx_my_mz_m$ к системе $Cxyz$ может быть выполнен при помощи последовательных поворотов: сначала на угол $-(\pi/2-\psi)$ относительно оси Cy_m, а затем – на угол θ относительно промежуточной оси Cz'. Запишем матрицы перехода, соответствующие этим поворотам,

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\sin\psi & 0 & \cos\psi\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\psi & 0 & \sin\psi\end{bmatrix};\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

и матрицу перехода $\mathbf{A}_{mc}$ от топоцентрической к скоростной системе координат

$$\mathbf{A}_{mc}=\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\psi & \sin\theta & \cos\theta\cos\psi\\ -\sin\theta\sin\psi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\psi\\ -\cos\psi & 0 & \sin\psi\end{bmatrix}. \qquad (4.15)$$

С использованием транспонированной матрицы (4.15) найдем компоненты вектора скорости в системе $Cx_my_mz_m$:

$$\mathbf{V}_m=(\mathbf{A}_{mc})^T\mathbf{V}_c=\begin{bmatrix}V\cos\theta\sin\psi\\ V\sin\theta\\ V\cos\theta\cos\psi\end{bmatrix}_m. \qquad (4.16)$$

Вращательное движение скоростной системы координат представим в виде двух составляющих: относительного – вращения системы $Cxyz$ относительно системы $Cx_my_mz_m$, определяемого угловыми скоростями $\dot\psi$ и $\dot\theta$; и переносного – вращения системы $Cxyz$ вместе с системой $Cx_my_mz_m$ относительно системы координат $Ox_zy_zz_z$, возникающего вследствие перемещения точки C со скоростью $\mathbf{V}$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ скорости вращения системы $Cxyz$ запишем как сумму

$$\boldsymbol{\omega}_c=\boldsymbol{\omega}_c^{(r)}+\boldsymbol{\omega}_c^{(e)}, \qquad (4.17)$$

где вектор скорости относительного вращения $\boldsymbol{\omega}_c^{(r)}$ представлен проекциями

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(r)}=\begin{bmatrix}\dot\psi\sin\theta\\ \dot\psi\cos\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}_c. \qquad (4.18)$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\omega}_m^{(e)}$ – скорости переносного вращения в проекциях на оси системы $Cx_my_mz_m$. Его величина определяется проекциями V_{xm}, V_{zm} скорости КА на оси системы $Cx_my_mz_m$ (движение в направлении местной вертикали не приводит к повороту системы координат) следующим образом. Движение со скоростью V_{xm} приводит к вращению системы координат вокруг оси Cz_m с угловой скоростью $\omega_{zm}=-\dfrac{V_{xm}}{r}$, а движение со скоростью V_{zm} приводит к вращению системы координат вокруг оси Oz_z с угловой скоростью $\omega_k=\dfrac{V_{zm}}{r\cos\varphi}$. Вращение вокруг оси Oz_z разложим на составляющие

$\omega_{xm} = \omega_k \cos\varphi$, $\omega_{ym} = \omega_k \sin\varphi$ и, используя выражение (4.16) для проекций V_{xm}, V_{zm}, найдем вектор $\boldsymbol{\omega}_m^{(e)}$:

$$\boldsymbol{\omega}_m^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{V}{r}\cos\theta\cos\psi \\ \frac{V}{r}\cos\theta\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi \\ -\frac{V}{r}\cos\theta\sin\psi \end{bmatrix}_m . \qquad (4.19)$$

С использованием матрицы перехода (4.15) получим

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(e)} = \mathbf{A}_{mc}\boldsymbol{\omega}_m^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{V}{r}\sin\theta\cos\theta\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi \\ \frac{V}{r}\cos^2\theta\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi \\ -\frac{V}{r}\cos\theta \end{bmatrix}_c . \qquad (4.20)$$

Подставив (4.18) и (4.20) в (4.17), находим

$$\boldsymbol{\omega}_c = \begin{bmatrix} \dot\psi\sin\theta + \frac{V}{r}\sin\theta\cos\theta\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi \\ \dot\psi\cos\theta + \frac{V}{r}\cos^2\theta\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi \\ \dot\theta - \frac{V}{r}\cos\theta \end{bmatrix}_c . \qquad (4.21)$$

Подставив компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}_c$ из (4.21) в (4.14) и записав очевидные выражения проекций силы $\mathbf{F}_\Sigma$ на оси скоростной системы координат, получим из (4.14) уравнения движения

$$m\frac{dV}{dt} = -X - G\sin\theta;$$

$$mV\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{V\cos\theta}{r}\right) = Y_{эф} - G\cos\theta; \qquad 4.22)$$

$$-mV\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{V\cos\theta}{r}\cos\psi\,tg\varphi\right) = Z.$$

Уравнения (4.22) необходимо дополнить кинематическими соотношениями для определения координат КА. Из курса теоретической механики известно [13], что полная производная радиус-вектора по времени определяется значениями производных от сферических координат r, λ, φ по формуле

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = H_r\dot r\mathbf{e}_r + H_\lambda\dot\lambda\mathbf{e}_\lambda + H_\varphi\dot\varphi\mathbf{e}_\varphi .$$

Учитывая выражения для коэффициентов Ляме $H_r = 1$, $H_\lambda = r\cos\varphi$, $H_\varphi = r$, а также направления ортов $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_{ym}$, $\mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_{zm}$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_{xm}$, находим

$$\mathbf{V} = r\dot\varphi\mathbf{e}_{xm} + \dot r\mathbf{e}_{ym} + r\cos\varphi\,\dot\lambda\mathbf{e}_{zm} . \qquad (4.23)$$

Сравнивая проекции вектора скорости, представленные выражениями (4.16) и (4.23), получим искомые кинематические соотношения для производных от сферических координат

$$\dot r = V\sin\theta;$$

$$\dot\lambda = \frac{V\cos\theta\cos\psi}{r\cos\varphi}; \qquad (4.24)$$

$$\dot\varphi = \frac{V\cos\theta\sin\psi}{r}.$$

Разрешив уравнения (4.22) относительно производных и используя выражения проекций аэродинамической силы (4.3), окончательно запишем уравнения движения КА

$$\dot V = -\sigma_x q g_0 - g\sin\theta;$$

$$\dot\theta = \frac{1}{V}\left(K\sigma_x q g_0\cos\gamma - g\cos\theta\right) + \frac{V\cos\theta}{r}; \qquad (4.25)$$

$$\dot\psi = -\frac{1}{V\cos\theta}K\sigma_x q g_0\sin\gamma - \frac{V\cos\theta}{r}\cos\psi\,\mathrm{tg}\varphi,$$

где $g = g_0\left(\frac{R_з}{r}\right)^2$, а зависимость

$$\gamma = \gamma(t) \qquad (4.26)$$

определяется выбранной программой управления.

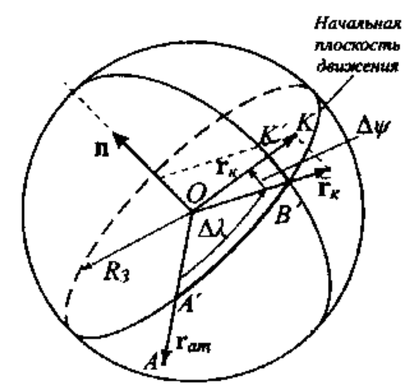


Рис. 4.4. К определению продольной боковой дальности на атмосферном участке: $AA' = h_{am}$; $KK' = h_k$; продольная дальность $L = \Delta\lambda\, R_3$; боковая дальность $L_{бок} = \Delta\psi\, R_3$

В результате численного решения системы дифференциальных уравнений движения КА (4.24)-(4.25) с заданной программой управления (4.26) и заданными начальными условиями в точке входа определяют зависимости параметров траектории от времени, перегрузки (по формуле (4.2)), тепловые потоки и другие характеристики. Решение системы (4.24)-(4.25) ведется до момента времени t_k, когда будет достигнута высота $h = h_k$, на которой включается парашютная система и начинается участок «мягкой» посадки.

На рис. 4.4 иллюстрируется схема определения боковой и продольной дальности на атмосферном участке траектории. Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к начальной плоскости движения (плоскости, обра-

…ованной векторами r_{am} и V_{ax}); $\bar{r}_к$ проекция вектора $r_к$ на начальну… плоскость движения. Боковая дальность представляет отклонение конечной точки (точки K) от начальной плоскости движения, отсчитываемое по поверхности Земли (дуга $K'B'$, соответствующая центральному углу $\Delta\psi$). Продольная дальность – длина дуги $A'B'$, откладываемая по поверхности Земли и соответствующая центральному углу $\Delta\lambda$.

Максимально достижимая боковая дальность характеризует маневренные возможности КА; в первую очередь, она зависит от располагаемого аэродинамического качества, угла входа и величины скорости входа.

Во многих случаях важной является задача оптимизации траектории, т.е. выбора оптимальной программы управления $\gamma = \gamma(t)$. Задачей оптимизации может являться снижение максимальных перегрузок, тепловых потоков, рассеивания точек посадки, либо увеличение боковой дальности.

Если пренебречь рассмотрением бокового движения и принять, что траектория спуска лежит в плоскости, образованной векторами r_{ax} и V_{ax}, то система уравнений значительно упростится:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma_x q g_0 - g\sin\theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{V}(K\sigma_x q g_0 \cos\gamma - g\cos\theta) + \frac{V\cos\theta}{r}; \\ \dot{h} &= V\sin\theta; \\ \dot{L} &= \frac{V\cos\theta}{r} R_3. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Задача 4.3. В геоцентрической системе координат заданы радиус-вектор точки входа $\mathbf{r}_{ах} = [1\,936$ км; $3\,090$ км; $5\,349$ км$]^T$; радиус-вектор конечной точки атмосферного участка $\mathbf{r}_k = [0;\ 3\,060$ км; $5\,600$ км$]^T$ и вектор нормали к плоскости движения в точке входа $\mathbf{n} = [0; -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}]^T$. Найти продольную и боковую дальность на атмосферном участке.

4.4 Аэродинамический нагрев и теплозащита КА

Полное исследование процессов тепло- и массообмена обшивки КА с окружающей средой при его торможении в атмосфере – весьма сложная задача. Поэтому в практике проектировочных расчетов обычно используются приближенные соотношения, позволяющие получить некоторые оценки параметров этих процессов для характерных участков поверхности аппарата. Рассмотрим соотношения, позволяющие получить такие оценки для критической точки носового затупления КА – точки, в которой относительная скорость набегающего потока обращается в ноль. Такая оценка не является достаточно полной для

расчета системы теплозащиты, но дает хорошую базу для сравнения различных типов траекторий [1].

При торможении КА в атмосфере тепловая энергия поступает к его поверхности двумя основными путями – за счет конвективной теплопередачи в пограничном слое и за счет излучения пограничного слоя. Интенсивность теплообмена характеризуется удельным тепловым потоком f – количеством тепловой энергии, поступающей к единице поверхности тела за единицу времени. При сравнительно невысоких скоростях, характерных для спуска с низких орбит, излучением пограничного слоя можно пренебречь [1]. Будем рассматривать КА скользящего типа и предположим, что его обтекание происходит в ламинарном режиме. В этом случае конвективный тепловой поток достигает максимального значения в критической точке носового затупления. Для его оценки используют [23] формулу

$$f_k = 2{,}6\cdot10^{-5}\sqrt{\frac{\rho}{r_н}}\,V^{3.25}\ \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]. \tag{4.28}$$

Здесь ρ – плотность атмосферы; $r_н$ – радиус носового затупления.

Помимо максимальной величины f_k в качестве критерия для сравнения различных траекторий часто рассматривают суммарное количество тепла Q, подведенное к единице поверхности за все время спуска

$$Q = \int_{t_0}^{t_k} f_k\,dt. \tag{4.29}$$

При некоторой температуре поверхности обшивки T_w (по шкале Кельвина) лучистый поток с ее поверхности вычисляется по формуле

$$f_{изл} = \varepsilon\,\sigma\,T_w^4, \qquad 4.30)$$

где ε – степень черноты поверхности; $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Считая, что все подводимое к обшивке тепло излучается обратно ($f_k = f_{изл}$), можно оценить равновесную температуру данной точки поверхности КА

$$T_w = \sqrt[4]{\frac{f_k}{\varepsilon\,\sigma}}. \tag{4.31}$$

При нагревании поверхности обшивки до температуры плавления начинается процесс сублимации – разрушения и уноса массы материала. Начало и конец процесса сублимации приближенно определяются условием

$$T_w = T_a, \tag{4.32}$$

где T_a – температура, при которой начинается разрушение материала. Для оценки напряженности тепловых режимов используют следующую процедуру. Температура заданной точки поверхности КА считается равновесной, т.е. определяется из соотношения (4.31), если она не превышает температуры T_a. Если вычисленная равновесная температура в интервале времени $[t_1; t_2]$ превышает T_a, то температура поверхности принимается равной T_a и вычисляется тепловой поток q_p, который определяет интенсивность разрушения материала

$$f_p = f_k - \varepsilon \sigma T_a^4. \qquad (4.33)$$

Линейная скорость разрушения материала определяется по формуле

$$\dot{\delta} = \frac{f_p}{\rho_{m3} H_{m3}}, \qquad (4.34)$$

где ρ_{m3} – плотность материала; H_{m3} – удельная теплопоглощающая способность материала теплозащиты при его разрушении.

Толщина унесенного слоя определяется выражением

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\delta}\, dt. \qquad (4.35)$$

Задача 4.4 (выполняется с использованием ЭВМ). Используя уравнения движения КА на атмосферном участке (4.27), составить программу для ЭВМ и провести расчет плоской траектории движения КА при заданных параметрах КА, программы управления $\gamma(t)$, параметрах траектории в точке входа. Предусмотреть расчет зависимости от времени параметров V, θ, h, L, n, f_k, а также вычисление одной из следующих характеристик, используемых при сравнении различных траекторий:

а) максимального значения перегрузки $n_{\max} = \max\limits_t n$;

б) максимального значения теплового потока в критической точке $f_{k\max} = \max\limits_t f_k$;

в) суммарного количества тепла Q, подведенного в критической точке к единице поверхности за все время спуска;

г) толщины унесенного слоя δ в критической точке.

Лабораторная работа

Расчет траектории движения КА скользящего типа

Задание:

1. Составить программу расчета пространственной траектории при заданных параметрах КА, управления и параметрах траектории в точке входа.

2. Для заданного варианта рассчитать траекторию движения КА от точки входа (h_{am} = 120 км) до высоты h_k = 9 км и найти зависимость от времени параметров: V, θ, ψ, h, λ, φ, q, n_x, n_y, а также максимальное значение перегрузки $n_{\max} = \max\limits_t n$, продольную и боковую дальность, время движения, скорость в конце участка торможения.

3. Получить оценки напряженности тепловых режимов в критической точке:

зависимость конвективного теплопотока от времени $f_k(t)$, интервал времени $[t_1; t_2]$ разрушения и уноса материала, зависимость от времени скорости уноса теплозащитного слоя $\dot{\delta}$ и толщину унесенного слоя δ, суммарное количество тепла Q, подведенное к единице поверхности за все время спуска.

Исходные данные: $r_н$ = 3 м; начальные условия при $t_0 = 0$: $\psi = \lambda = \varphi = 0$.

Варианты:

№	σ_x, м²/Н	$K = \frac{C_y}{C_x}$	γ, град	V_{ex}, м/с	θ_{ex}, град	T_a, К	H_{m3}, кДж/кг	ε	ρ_{m3}, кг/м³
1	$2\cdot10^{-4}$	0,2	30	7 500	−2	1 500	700	0,7	1 100
2	$2\cdot10^{-4}$	0,3	50	7 600	−3	2 100	1 000	0,75	1 300
3	$2\cdot10^{-4}$	0,35	20	7 400	−3	1 900	800	0,75	1 400
4	$2\cdot10^{-4}$	0,4	80	7 600	−2	1 800	1 400	0,6	2 000
5	$2,5\cdot10^{-4}$	0,2	15	7 500	−4	2 000	900	0,85	1 600
6	$2,5\cdot10^{-4}$	0,25	55	8 000	−4	2 100	800	0,75	1 400
7	$2,5\cdot10^{-4}$	0,3	30	7 400	−3	1700	800	0,75	1 300
8	$2,5\cdot10^{-4}$	0,35	75	8 100	−4	2 200	1 200	0,6	1 500
9	$3\cdot10^{-4}$	0,2	25	7 500	−4	2 100	900	0,75	1 400
10	$3\cdot10^{-4}$	0,25	60	8 100	−5	2 200	900	0,7	1 500
11	$3\cdot10^{-4}$	0,35	30	7 700	−4	1 600	900	0,9	1 100
12	$3\cdot10^{-4}$	0,4	80	7 800	−5	2 200	1 000	0,75	1 500
13	$3,5\cdot10^{-4}$	0,2	15	7 500	−3	1 400	1 000	0,85	1 600
14	$3,5\cdot10^{-4}$	0,3	70	7 600	−3	2 100	1 000	0,75	1 400
15	$3,5\cdot10^{-4}$	0,4	75	7 700	−2	2 100	900	0,75	1 400
16	$3,5\cdot10^{-4}$	0,5	80	7 900	−4	2 200	1 200	0,6	1 500
17	$4\cdot10^{-4}$	0,2	35	7 700	−4	2 100	700	0,65	1 800
18	$4\cdot10^{-4}$	0,3	65	7 600	−3	2 000	1 000	0,85	1 500
19	$4\cdot10^{-4}$	0,4	75	7 500	−3	1 900	1 400	0,9	1 800
20	$4\cdot10^{-4}$	0,5	60	7 900	−4	2 000	1 000	0,75	1 400

Методические указания:

Расчет траектории проводится путем численного интегрирования системы уравнений движения КА в атмосфере (4.24)-(4.25) с постоянным шагом по времени Δt (например, при использовании метода Рунге-Кутта 4-го порядка без потери точности можно взять величину шага Δt = 1 с). Угол крена γ = const (взять из варианта задания).

В каждый момент времени вычисляются:

– координаты КА и параметры его скорости;
– высота h и ускорение силы тяжести g;
– плотность атмосферы по (1.64) (здесь принимается экспоненциальная модель атмосферы);

– правые части уравнений (4.24) – (4.25);
– перегрузки по формулам (4.2);
в критической точке носового затупления:
а) конвективный тепловой поток по (4.28) и количество тепла $\Delta Q = f_k \Delta t$, подведенное за время Δt;
б) температура поверхности обшивки по (4.31)-(4.32);
в) скорость разрушения материала $\dot{\delta}$ и толщина слоя $\Delta\delta = \dot{\delta}\,\Delta t$, унесенного за время Δt (в случае достижения температуры, при которой $\dot{\delta} > 0$).

Найденные значения выводятся в таблицу с интервалом времени 10-15 с. Интегрирование системы уравнений проводится до достижения условия $h = h_к$.

В конечный момент времени вычисляются:
- скорость КА;
- продольная и боковая дальность $L = \lambda R_З$; $L_{бок} = \varphi R_З$;
- суммарное количество тепла $Q = \sum_i \Delta Q^{(i)}$, подведенное за все время спуска (i – номер шага по времени);
- толщина унесенного слоя $\delta = \sum_i \Delta\delta^{(i)}$.

5 ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛА

5.1 Сведения из классического вариационного исчисления

Вариационное исчисление рассматривает задачи нахождения экстремальных значений (максимальных и минимальных) определенных интегралов. В простейшем случае это интеграл вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(t, y, \dot{y})\,dt, \tag{5.1}$$

где F – заданная функция; $y(t)$ – неизвестная функция аргумента t, подлежащая определению. В некоторых случаях значения t_0, t_k, $y(t_0) = y_0$, $y(t_k) = y_k$ заданы; в других случаях они нуждаются в определении. Интеграл J называют функционалом, определенным на некотором множестве функций $y(t)$. В классическом вариационном исчислении предполагается, что если функционал имеет вид (5.1), то функция $y^*(t)$, сообщающая экстремальное значение функционалу, выбирается на множестве функций, непрерывно имеющих на отрезке $[t_0; t_k]$ вторые производные.

Необходимым условием существования экстремума функционала (5.1) является равенство нулю его первой вариации

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \delta F(t, y, \dot{y})\,dt, \tag{5.2}$$

определяемой произвольными малыми вариациями $\delta y(t)$, допустимыми граничными условиями (так, если задано значение $y(t_0) = y_0$, то вариация $\delta y(t_0) = 0$). Вариация δF, соответствующая вариации δy, записывается в виде

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}, \tag{5.3}$$

где $\delta\dot{y}$ – вариация производной функции $y(t)$, связанная с вариацией самой функции известным соотношением

$$\delta\dot{y} = (\delta y)^{\cdot} = \frac{d}{dt}(\delta y). \tag{5.4}$$

Подставив (5.3) в (5.2) и используя (5.4), а также применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dt}(\delta y) \right) dt =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \dot y}\delta y\Big|_{t=t_k} - \frac{\partial F}{\partial \dot y}\delta y\Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot y}\right)\delta y\, dt = 0. \qquad (5.5)$$

В силу произвольности вариации δy внутри и на концах отрезка $[t_0; t_k]$ отсюда, в частности, следует, что подынтегральное выражение в (5.5) должно равняться нулю на всем интервале $(t_0; t_k)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot y} = 0. \qquad (5.6)$$

Общее решение *уравнения Эйлера – Лагранжа* (5.6) содержит две произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, которые ставятся так, чтобы каждое внеинтегральное слагаемое в (5.5) также равнялось нулю. Если в момент t_0 или в момент t_k значения $y(t)$ известны, то для этого момента времени $\delta y = 0$. В противном случае из (5.5) следует, что необходимо задать $\frac{\partial F}{\partial \dot y} = 0$ (естественное граничное условие). Имеем

$$\left[\begin{array}{l} y = y_0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot y} = 0, \quad t = t_0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = y_k; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot y} = 0, \quad t = t_k. \end{array}\right. \qquad (5.7)$$

Итак, показано, что простейшая вариационная задача может быть сведена к решению краевой задачи (5.6) – (5.7)

Представленная задача допускает ряд обобщений; рассмотрим два из них.

1) Функция $y(t)$, сообщающая экстремальное значение функционалу, содержащему производные от $y(t)$ до порядка n включительно:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(t, y, \dot y, \ddot y, \dots, y^{(n)})\, dt, \qquad (5.8)$$

должна удовлетворять уравнению Эйлера вида

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot y} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot y} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \qquad (5.9)$$

2) Система n функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$, сообщающая экстремальное значение функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(t, y_1, \dot y_1, \dots, y_n, \dot y_n)\, dt, \qquad (5.10)$$

должна удовлетворять системе n уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \qquad (5.11)$$

а также граничным условиям вида (5.7) для каждой из функций $y_i(t)$.

До сих пор предполагалось, что на функции $y_i(t)$ не наложены никакие ограничения; экстремум в этом случае называется безусловным. Рассмотрим да-

лее случай, когда функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ подчиняются m уравнениям связи $(m < n)$ вида

$$\varphi_j(t, y_1, \dot y_1, \dots, y_n, \dot y_n) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \qquad (5.12)$$

В этом случае вводят функцию

$$L = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j, \qquad (5.13)$$

где $\lambda_j(t)$ – неизвестные функции времени, называемые *множителями Лагранжа*. Используя продемонстрированный выше подход, можно показать, что необходимое условие экстремума функционала (5.10) с уравнениями связи (5.12) записывается в виде *уравнений Лагранжа с множителями*

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (5.14)$$

Для нахождения условного экстремума функционала (5.10) имеется $m + n$ уравнений (5.14) и (5.12) для такого же количества неизвестных функций $y_i(t)$ и $\lambda_j(t)$. Уравнения (5.14) дополняются $2n$ граничными условиями вида (5.7) для каждой из функций $y_i(t)$.

Можно показать также, что если один из пределов интегрирования, например, t_k не задан, но граничные условия $y_i(t_k)$ даны, то должно выполняться следующее соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot y_i}\dot y_i - F = 0 \ \text{ при } t = t_k. \qquad (5.15)$$

Если один из пределов интегрирования, а также одно или несколько граничных условий явно не заданы, то в этом случае ставится более общее *условие трансверсальности* [18].

Заметим, что поставленная задача не всегда имеет решение. Кроме того, уравнения (5.14), (5.7) и (5.15) являются лишь необходимыми условиями, но не достаточными.

Принята следующая классификация вариационных задач. Задача определения функций $y_i(t)$, сообщающих экстремум функционалу (5.10), называется *задачей Лагранжа*. Задача определения экстремума функционала вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(t, y_1, \dot y_1, \dots, y_n, \dot y_n)\, dt + G(t, y_1, \dots, y_n)\Big|_{t=t_k}, \qquad (5.16)$$

где G – заданная функция, называется *задачей Больца*. Если в (5.16) $F \equiv 0$, так что ищется экстремум только функции G, то вариационная задача называется *задачей Майера*.

В прикладных задачах управления движением ЛА задача Майера наиболее распространена, так как часто критерием оптимальности является значение какого-либо параметра траектории на правом конце временного интервала (скорости или координат ЛА в момент окончания рассматриваемого маневра, времени совершения маневра и т.д.).

Функционал (5.16), соответствующий задаче Больца, может быть переписан в виде

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (F + \dot{y}_{n+1})\, dt, \tag{5.17}$$

где $y_{n+1}(t)$ – дополнительная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению связи

$$\dot{y}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{5.18}$$

и граничным условиям

$$y_{n+1}(t_0) = 0; \quad y_{n+1}(t_k) = G(t_k, y_1(t_k), \dots, y_1(t_k)). \tag{5.19}$$

Таким образом, задача Больца и, как частный случай, задача Майера сводится к задаче Лагранжа на условный экстремум функционала (5.17) с условием (5.18) и, возможно, условиями (5.12). Решение задачи Лагранжа в рамках классической теории может быть получено путем решения краевой задачи, включающей уравнения (5.14) и соответствующие граничные условия.

Пример 5.1 Рассмотрим задачу выбора оптимальной программы тангажа баллистической ракеты, т.е. программы, обеспечивающей при заданных проектных параметрах ракеты максимальное значение дальности полета. Будем считать, что поле силы тяжести является плоскопараллельным, расход топлива является постоянной величиной; вращение Земли и аэродинамические силы не учитываются. Уравнения движения ракеты могут быть представлены в виде (1.58), где положено $g = \text{const}$; $\beta = 0$; индекс i опущен.

Дальность полета ракеты определяется, в первую очередь, величиной ее скорости V_k в конце активного участка траектории. При заданных конструктивных параметрах ракеты величина V_k зависит только от программы тангажа. Функционал, подлежащий минимизации, запишем в виде

$$J = -V_k^2 = -\int_0^{t_k} d(V^2) = -\int_0^{t_k} d(V_x^2 + V_y^2) = \int_0^{t_k} [-2(V_x\dot{V}_x + V_y\dot{V}_y)]dt\,. \tag{5.20}$$

Рассматриваемая задача является задачей на условный экстремум. В качестве уравнений связи (5.12) используем два первых уравнения системы (1.58), переписанных в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \dot{V}_x - \frac{P}{m}\cos\vartheta = 0; \\ \varphi_2 &\equiv \dot{V}_y - \frac{P}{m}\sin\vartheta + g = 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Остальные уравнения системы (1.58) здесь не учитываются, так как на координаты ракеты не накладываются ограничения, а расход массы – постоянный.

Запишем выражение функции (5.13)

$$L = -2(V_x\dot{V}_x + V_y\dot{V}_y) + \lambda_1\left(\dot{V}_x - \frac{P}{m}\cos\vartheta\right) + \lambda_2\left(\dot{V}_y - \frac{P}{m}\sin\vartheta + g\right). \tag{5.22}$$

В сформулированной задаче пять неизвестных – V_x, V_y, ϑ, λ_1, λ_2. Кроме двух уравнений (5.21), необходимо записать еще три уравнения вида (5.14). Вычислив необходимые частные производные от функции (5.22), можно получить

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0; \quad \dot{\lambda}_2 = 0; \\ \lambda_1 \sin\vartheta - \lambda_2\cos\vartheta = 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Общее решение системы (5.23) имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = C_1; \quad \lambda_2 = C_2; \\ &\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg}\vartheta_0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Таким образом, оптимальная программа тангажа ракеты предполагает, что угол наклона продольной оси ракеты остается постоянным на всем активном участке траектории. Величина ϑ_0 определяется из условия, накладываемого на значение траекторного угла θ в конце активного участка траектории.

Задача 5.1 Используя упрощающие предположения о характере движения, рассмотренные в примере 5.1, показать, что закон изменения угла тангажа ракеты космического назначения, обеспечивающий максимум высоты орбиты в конце активного участка и выполнение условия $V_y(t_k) = 0$, имеет вид

$$\operatorname{tg}\vartheta = C_0 - C_1 t \tag{5.25}$$

– *закон линейного тангенса* угла тангажа.

5.2 Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Классические методы решения вариационных задач предполагают, что функции $y_i(t)$ являются достаточно гладкими, в то время как во многих прикладных задачах оптимальные управления движением могут представлять разрывные функции времени. Поэтому неизвестные функции $y_i(t)$, подлежащие определению в результате решения вариационной задачи, часто удобно разделить на переменные состояния $x_i(t)$ и управляющие функции $u_j(t)$, причем, если переменные состояния, по-прежнему, должны удовлетворять некоторым требованиям непрерывности (что соответствует исходной физической постановке большинства задач), то для переменных управления подобные ограничения снимаются.

Пусть движение динамической системы описывается системой n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}), \qquad (5.26)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ – матрица-столбец переменных состояния; $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ – матрица-столбец управляющих воздействий; $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$ – матрица-столбец функций, непрерывных во всей области изменения аргументов и непрерывно дифференцируемых по аргументам t и $\mathbf{x}$.

Начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (5.27)$$

Также для некоторых значений i заданы условия при $t = t_k$

$$x_i(t_k) = x_i^k. \qquad (5.28)$$

Пусть нужно выбрать рациональную траекторию движения системы (5.26) на отрезке времени $[t_0; t_k]$ такую, на которой функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(t,\ \mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt + G(\mathbf{x}(t_k)) \qquad (5.29)$$

принимает минимальное значение. В (5.29) F и G – заданные функции, непрерывные во всей области изменения аргументов и непрерывно дифференцируемые по аргументам t и $\mathbf{x}$.

Минимизация функционала (5.29) производится за счет выбора законов $u_j(t)$ управления системой (5.26) (например, рулей ЛА). Множество управлений ограничено классом кусочно-непрерывных функций; значения этих функций в любой момент времени принадлежат множеству U_m

$$\mathbf{u}(t) \in U_m. \qquad (5.30)$$

Множество U_m представляет собой ограниченную, замкнутую и выпуклую область m-мерного пространства R_m.

Найдем необходимые условия минимума функционала (5.29) при наличии ограничений, главными из которых являются уравнения (5.26). Для решения задачи применим метод множителей Лагранжа. Введем функции времени (пока неизвестные) $\lambda_i(t)$. Из (5.26) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\dot{x}_i - f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\right) = 0.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L(t_0, t_k, \mathbf{x}, \mathbf{u},\ \lambda) = J + \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\dot{x}_i - f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\right) dt,$$

где $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$. Перепишем функцию Лагранжа в виде

$$L = \int_{t_0}^{t_k} \left[F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) \right] dt + G(\mathbf{x}(t_k)). \qquad (5.31)$$

Преобразуем входящие в (5.31) слагаемые:

$$\int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i x_i\, dt.$$

Подставив результат преобразований в (5.31), получим

$$L = -\int_{t_0}^{t_k} \left[\sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i - F \right] dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big|_{t_0}^{t_k} + G(\mathbf{x}(t_k)).$$

Введем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u},\ \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i - F. \qquad (5.32)$$

Используя (5.32), запишем окончательное выражение функции Лагранжа

$$L(t_0, t_k, \mathbf{x}, \mathbf{u},\ \lambda) = -\int_{t_0}^{t_k} \left[\sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i x_i + H \right] dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big|_{t_0}^{t_k} + G(\mathbf{x}(t_k)). \qquad (5.33)$$

Правило множителей Лагранжа утверждает, что решение поставленной задачи (5.26)-(5.30) на условный экстремум находится среди решений задачи на безусловный минимум для функционала (5.33).

Рассмотрим необходимые условия минимума функционала (5.33). Управления $u_j(t)$ входят в выражение (5.33) в составе гамильтониана H. Для достижения минимума функции Лагранжа необходимо, чтобы в каждый момент времени управление выбиралось так, чтобы величина H достигала максимума. Принцип максимума утверждает, что из всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию (5.30), оптимальным является такое $\mathbf{u}(t)$, которое совпадает со значением функции

$$\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \lambda) = \arg_{\mathbf{u} \in U_m} \left\{ \max H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u},\ \lambda) \right\}, \qquad (5.34)$$

причем $\mathbf{x}, \lambda$ считаются фиксированными, не зависящими от $\mathbf{u}$ параметрами.

Далее, необходимым условием минимума функционала (5.33) является равенство нулю его первой вариации δL, определяемой произвольными малыми вариациями $\delta x_i(t)$, допустимыми граничными условиями. Считая, что функция H непрерывно дифференцируема по аргументам x_i, из (5.33) получим

$$\delta L = -\int_{t_0}^{t_k} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right] dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_k)\, \delta x_i(t_k) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i} \delta x_i \Big|_{t=t_k} = 0, \qquad (5.35)$$

так как вариации $\delta x_i(t_0) = 0$ из-за граничных условий (5.27).

В силу произвольности и независимости вариаций δx_i внутри отрезка $[t_0; t_k]$ отсюда, в частности, следует, что множитель при каждой вариации δx_i должен равняться нулю на всем интервале $(t_0; t_k)$. Получаем систему уравнений

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (5.36)$$

Если для некоторого i при $t = t_k$ задано условие (5.28), то вариация $\delta x_i(t_k) = 0$. В противном случае в силу независимости и произвольности вариаций $\delta x_i(t_k)$ из (5.35) следует граничное условие для λ_i. Итак, в момент t_k имеем следующие граничные условия

$$\begin{cases} \lambda_i(t_k) = -\left.\dfrac{\partial G}{\partial x_i}\right|_{t=t_k}; \\ x_i(t_k) = x_i^k, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n. \tag{5.37}$$

Если время движения не фиксировано заранее, а должно выбираться так, чтобы функционал (5.33) принимал минимальное значение, то для определения t_k записывается условие равенства нулю вариации δL функционала (5.33), определяемой произвольными вариациями δt_k. Находим

$$\begin{aligned} \delta L = &-\left.\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i x_i + H\right)\right|_{t=t_k} \delta t_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i x_i \Big|_{t=t_k} \delta t_k + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i \Big|_{t=t_k} \delta t_k + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i} \dot{x}_i \Big|_{t=t_k} \delta t_k = -H\big|_{t=t_k} \delta t_k + \sum_{i=1}^{n} \left.\left(\lambda_i + \frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\dot{x}_i\right|_{t=t_k} \delta t_k = 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Для тех номеров i, для которых при $t = t_k$ задано условие (5.28), вариации $\delta x(t_k) = \dot{x}_i|_{t=t_k} \delta t_k = 0$ и поэтому равны нулю соответствующие слагаемые в последней сумме (5.38). Поэтому, с учетом соотношения (5.37), из (5.38) получаем

$$H\big|_{t=t_k} = 0. \tag{5.39}$$

Сформулируем окончательный результат. Для того, чтобы управление доставляло минимум функционалу J в исходной задаче (5.26)-(5.30), необходимо, чтобы в каждый момент времени управление $\mathbf{u}(t)$ совпадало бы со значением функции $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, определяемой условием (5.34). Функции $x_i(t), \lambda_i(t)$ должны удовлетворять гамильтоновой системе уравнений (5.26), (5.36), причем уравнения (5.26) на основании введенного определения гамильтониана (5.32) могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.40}$$

Граничные условия для системы уравнений (5.26), (5.36) заданы на обоих концах интервала $[t_0; t_k]$ в виде (5.27) и (5.37). Если время движения не фиксировано заранее, то для его определения имеется условие (5.39).

Заметим, что для произвольной системы (5.26) сформулированные условия являются лишь необходимыми условиями оптимальности. Только для систем, линейных относительно переменных состояния, эти условия являются также и достаточными. Тем не менее, во многих технических задачах предполагается, что если с использованием принципа максимума удается найти единственное решение задачи, то найденное управление и будет оптимальным. Если же

существует несколько решений, то из совокупности управлений следует выбрать такое, которое на самом деле доставляет минимальное значение функционалу J.

Итак, алгоритм поиска оптимального управления на основе принципа максимума состоит из следующих этапов.

1) После формулировки задачи в виде (5.26)-(5.30) составляется выражение гамильтониана (5.32).

2) Записывается сопряженная система уравнений (5.36) с граничными условиями (5.37).

3) Решается задача определения $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ из (5.34), т.е. путем максимизации H по явно входящим $u_j(t)$; при этом t, $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$ считаются постоянными параметрами.

4) Найденная функция $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ подставляется в гамильтонову систему уравнений (5.26), (5.36).

5) Решается полученная краевая задача, включающая $2n$ дифференциальных уравнений и такое же число граничных условий (5.27) и (5.37). В результате определяются функции $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$.

6) Окончательно оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ определяется путем подстановки в выражения $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ функций $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, найденных на этапе 5.

Заметим, что выполнение этапов 3 и 5 аналитическими методами возможно лишь для весьма ограниченного круга задач. Поэтому в большинстве случаев решение задачи (5.26)-(5.30) проводится с использованием ЭВМ и представляет довольно сложную в вычислительном плане процедуру. Некоторые из численных методов отыскания оптимального управления рассматриваются в следующем параграфе.

Задачи

5.2 Рассматривается движение материальной точки массы $m = \text{const}$ вдоль оси x под действием управляющей силы F; уравнение движения $\ddot{x} = u$ (здесь $u = \dfrac{F}{m}$), причем управление ограничено по величине: $|u(t)| \le 1$. Используя принцип максимума, требуется провести синтез оптимального управления $u(t)$, $t \in [0; t_k]$, которое переводит материальную точку из некоторого начального состояния в конечное состояние $(x(t_k) = 0,\ \dot{x}(t_k) = 0)$ за минимальное время. Изобразить на фазовой плоскости оптимальные траектории.

Указание: использовать следующую формулировку задачи:

$$\ddot{x} = u; \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0; \quad x(t_k) = 0; \quad \dot{x}(t_k) = 0;$$

$$J = t_k \to \min; \quad |u(t)| \le 1.$$

5.3 Для материальной точки, рассмотренной в задаче 5.2, провести синтез оптимального управления, минимизирующего «затраты на управление», решая следующую задачу:

$$\ddot{x} = u;\quad x(0) = 0;\quad \dot{x}(0) = 0;\quad x(t_k) = x_k;\quad \dot{x}(t_k) = v_k;$$

$$J = \int_0^{t_k} \frac{u^2}{2} dt \to \min;\quad u(t) - \text{неограничено.}$$

Найти оптимальное управление и соответствующую траекторию движения, рассмотрев частный случай $x(t_k) = 1;\ \dot{x}(t_k) = 3$.

5.4 Для материальной точки, рассмотренной в задаче 5.2, провести синтез оптимального управления, минимизирующего одновременно время перехода в заданное конечное состояние и затраты на управление, решая следующую задачу:

$$\ddot{x} = u;\quad x(0) = x_0;\quad \dot{x}(0) = v_0;\quad x(t_k) = 0;\quad \dot{x}(t_k) = 0;$$

$$J = \int_0^{t_k} \left(1 + \frac{u^2}{2}\right) dt \to \min;\quad |u(t)| \le 1.$$

5.3 Численные методы решения задач оптимального управления

Рассмотрим задачу определения оптимального управления (5.26)-(5.30). Численное решение этой задачи осложняется по ряду причин, основными среди которых являются следующие:

- большая размерность решаемых задач;
- наличие как начальных (при $t = t_0$), так и терминальных (при $t = t_k$) условий, а также наличие сложных ограничений на управление;
- наличие во многих задачах нескольких экстремумов функционала J, а также, в некоторых случаях, недифференцируемость функционала.

В связи с большим разнообразием постановок задач оптимального управления и указанными трудностями их решения имеется достаточно много различных методов численного решения. Достаточно условно эти методы можно разделить на следующие группы.

1) Сведение к задаче оптимизации функции конечного числа переменных (задаче на условный экстремум).

2) Сведение к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3) Методы последовательного улучшения управления.

4) Методы, основанные на принципе динамического программирования Беллмана.

Вкратце рассмотрим методы первых трех групп; описание методов четвертой группы можно найти, например, в [12, 17].

Сведение к задаче на условный экстремум. Поскольку решение краевой задачи (5.26)-(5.28) однозначно определяется выбранным управлением $\mathbf{u}(t)$, то можно считать, что функционал J (5.29) зависит только от $\mathbf{u}(t)$. Тогда задача (5.26)-(5.30) сводится к задаче минимизации функционала $J(\mathbf{u})$ на множестве U_m.

Разобьем отрезок $[t_0;\ t_k]$ на N частей равноотстоящими точками $t_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$); h – шаг сетки. Будем считать, что на каждом отрезке $[t_j,\ t_{j+1})$ управление $\mathbf{u}(t)$ постоянно:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j,\quad t \in [t_j, t_{j+1}),\quad \mathbf{u}_j \in U_m.$$

Для некоторого набора управлений $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ можно найти решение краевой задачи (5.26)-(5.28) и вычислить значение функционала качества J, который становится функцией набора управлений: $J = J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$. Далее для отыскания оптимального управления нужно решить задачу на условный экстремум для функции $J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$. Методы решения подобных задач известны [12].

Практическая реализация данного подхода весьма сложна, что связано как с большой размерностью пространства неизвестных (число переменных задачи равно mN), так и с необходимостью выполнения терминальных условий (5.28). Нахождение набора управлений, при которых хотя бы приближенно будут выполняться условия (5.28), является достаточно непростой задачей.

Сведение к краевой задаче. Этот способ предполагает применение принципа максимума (см. подраздел 5.2), либо метода множителей Лагранжа классического вариационного исчисления (см. подраздел 5.1). Наиболее распространенным методом решения полученной нелинейной краевой задачи является метод Ньютона и его модификации (метод Ньютона – Бройдена, метод секущих и др. [12]). Рассмотрим схему метода Ньютона применительно к задаче, включающей соотношения (5.40), (5.36), (5.27) и (5.37), в которые подставлена функция $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, найденная на основе применения принципа максимума.

Зададим приближения к начальным условиям для сопряженных переменных

$$\lambda_i(t_0) = \lambda_i^0,\quad i = 1, \dots, n \tag{5.41}$$

и решим полученную задачу Коши для уравнений (5.40) и (5.36) с начальными условиями (5.27) и (5.41). В результате найдем значения $x_i(t_k)$ и $\lambda_i(t_k)$. Ясно, что при подстановке этих значений в граничные условия (5.37) последние не будут выполняться. Таким образом, задача сводится к нахождению таких начальных условий λ_i^0, $i = 1, \dots, n$, при которых (5.37) обращаются в тождества. Перепишем (5.37) в виде

$$\widetilde{\psi}_i(\mathbf{x}(t_k, \lambda_i^0), \lambda(t_k, \lambda_i^0)) = \psi_i(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = 0,\quad i = 1, \dots, n.$$

Далее, вводя матрицу-столбец $\mathbf{z} = [\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0]^T$ и матрицу-столбец функций $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T$, приведем последнюю алгебраическую систему нелинейных уравнений к виду

$$\psi(\mathbf{z}) = 0. \tag{5.42}$$

Процедура применения метода Ньютона рассмотрена в подразделе 3.6. Применительно к уравнению (5.42) она базируется на соотношении вида

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z}^{(k)})^{-1}\psi(\mathbf{z}^{(k)}),$$

где $\mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z})$ – матрица производных функций $\psi(\mathbf{z})$ по столбцу $\mathbf{z}$. Вычисление матрицы $\mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z})$ выполняется путем численного дифференцирования функции $\psi(\mathbf{z})$ следующим образом. На $(k+1)$-й итерации вначале вычисляется $\psi(\mathbf{z})$. Далее начальному условию для λ_1 сообщается малое приращение $\Delta\lambda_1$ (начальные условия для остальных λ_i остаются без изменений) и после решения задачи Коши находятся соответствующие приращения $(\Delta\psi_i)_1$. Аналогично определяются приращения $(\Delta\psi_i)_j$, соответствующие малым приращениям начальных условий $\Delta\lambda_j$, $j = 2, \dots, n$. Элементы матрицы $\mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z})$ находятся по формуле

$$\mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z}) = [\mathbf{\Psi}_{zij}] = \left[\frac{(\Delta\psi_i)_j}{\Delta\lambda_j}\right].$$

При численной реализации метода Ньютона возникают значительные трудности; укажем некоторые из них.

1) Метод Ньютона применим лишь в случае, когда функции $\psi(\mathbf{z})$ являются дифференцируемыми, а это гарантировано лишь в случае дифференцируемости правых частей уравнений рассматриваемой краевой задачи.

2) Возможна неединственность решения задачи (5.42).

3) Сходимость метода Ньютона во многом зависит от удачного выбора начального приближения $\mathbf{z}^{(0)}$. При выборе различных начальных приближений могут быть получены различные решения, в том числе, и соответствующие максимуму функционала J.

Признаком медленной сходимости является плохая обусловленность матрицы $\mathbf{\Psi}_z(\mathbf{z}^{(k)})$ на каком-либо шаге итерационного процесса; в некоторых случаях определитель матрицы может обратиться в нуль – здесь следует изменить начальное приближение либо вообще использовать другой метод решения.

Одним из альтернативных методу Ньютона способов решения краевой задачи является преобразование этой задачи к задаче безусловной минимизации и применение соответствующих методов решения. Например, в методе штрафных функций вместо задачи (5.42) рассматривается задача минимизации функции

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \psi_i^2(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0). \tag{5.43}$$

Здесь w_i – нормирующие коэффициенты, приводящие функцию Φ к безразмерному виду.

Вычислительные схемы различных методов минимизации функции (5.43) приведены, например, в [12]. Выбор той или иной схемы определяется, в первую очередь, свойствами функции (5.43).

Во многих задачах минимизации функций $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ достаточно эффек-

тивным является *метод координатного спуска с квадратичной интерполяцией-экстраполяцией* [6]. Метод основан на последовательном поиске минимума по каждой из переменных z_i с применением для этого метода квадратичной интерполяции-экстраполяции. Рассмотрим вкратце схему этого метода, считая, что из каких-либо априорных соображений известны начальные приближения $z_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть на некотором шаге покоординатного спуска все переменные z_j, $j \neq i$ фиксированы. Тогда, обозначив $z_i = x$ и $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = F(x)$, для определения точки минимума заменим функцию одной переменной $F(x)$ на отрезке $x_1 \pm d$, где x_1 – начальное приближение, а d – полуинтервал интерполяции, квадратичной параболой, экстремум которой вычисляется аналитически. Вычислив три значения $F(x)$ в равноотстоящих точках $F_0 = F(x_0 = x_1 - d)$, $F_1 = F(x_1)$, $F_2 = F(x_2 = x_1 + d)$, положение точки экстремума найдем по формуле

$$x_m = \frac{1}{2}\frac{F_0(2x_1 + d) - 4F_1x_1 + F_2(2x_1 - d)}{F_0 - 2F_1 + F_2}. \tag{5.44}$$

Точка x_m может лежать в интервале $x_1 \pm d$ (интерполяция), и быть вне его (экстраполяция). При реализации метода необходимо учитывать, что x_m может являться точкой максимума (при $F_0 - 2F_1 + F_2 < 0$), кроме того, из-за значительной погрешности экстраполяции даже при $F_0 - 2F_1 + F_2 > 0$ значение $F_m = F(x_m)$ может оказаться бóльшим какого-либо из значений F_0, F_1, F_2. Поэтому в качестве нового приближения выбирается такое x, которое соответствует наименьшему из значений функции F_m, F_0, F_1, F_2.

Расчет повторяется для следующего аргумента z_i функции $\Phi(z_1, \dots, z_n)$. Вычисления заканчиваются, если на некоторой итерации для всех аргументов z_i найденная точка экстремума удовлетворяет условию $|x_m - x_1| < \varepsilon$, либо превышено максимально допустимое число итераций. В последнем случае, а также, если найденное в результате значение функции штрафа недопустимо велико, нужно повторить поиск, используя другие начальные приближения $z_i^{(0)}$.

Заметим, что для применения метода начальные приближения $z_i^{(0)}$ должны обеспечивать построение допустимого управления в задаче Коши, включающей уравнения (5.40) и (5.36), в которые подставлена функция $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, с начальными условиями (5.27) и (5.41), т.е. управления, хотя бы приблизительно позволяющего выполнить граничные условия (5.37) и найти приемлемое значение функции штрафа $\Phi(z_1, \dots, z_n)$.

Методы последовательного улучшения управления. Эти методы не связаны непосредственно с использованием необходимых условий оптимальности; они предполагают непосредственный поиск минимума функционала $J(\mathbf{u})$ в области U_m. Применение градиентных методов минимизации основано на возможности вычисления градиента $J(\mathbf{u}^{(k)})$ в произвольной точке $\mathbf{u}^{(k)}(t)$. Это позволяет построить итерационный процесс, в котором каждое новое приближение к управлению $\mathbf{u}^{(k+1)}(t)$ таково, что $J(\mathbf{u}^{(k+1)}) < J(\mathbf{u}^{(k)})$. Далее рассмотрим два метода этой группы – *метод градиента* и *метод штрафных функций* [18].

5.4 Метод градиента

Метод используется для нахождения оптимального управления системой, описываемой системой дифференциальных уравнений (5.26) с начальными условиями (5.27), функционалом качества (5.29) и допустимыми управлениями (5.30). Кроме того, для конечного момента времени $t = t_k$, который не задан, поставлено условие

$$\varphi(t_k, \mathbf{x}(t_k)) = 0. \tag{5.45}$$

Используем здесь подход, рассмотренный в подразделе 5.2, только минимизировать будем функционал

$$L(t_0, t_k, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = -\int_{t_0}^{t_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i x_i + H\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big|_{t_0}^{t_k} + \overline{G}(\mathbf{x}(t_k)), \tag{5.46}$$

отличающийся от лагранжиана (5.33) тем, что вместо функции $G(\mathbf{x}(t_k))$ введена функция

$$\overline{G}(\mathbf{x}(t_k)) = G(\mathbf{x}(t_k)) + \mu\varphi(t_k, \mathbf{x}(t_k)), \tag{5.47}$$

где μ – постоянный множитель Лагранжа.

Из условия минимума (5.46) можно получить систему уравнений (5.36) и граничные условия для множителей Лагранжа, аналогичные (5.37):

$$\lambda_i(t_k) = -\frac{\partial\overline{G}(\mathbf{x}(t_k))}{\partial x_i} = -\frac{\partial G(\mathbf{x}(t_k))}{\partial x_i} - \mu\frac{\partial\varphi(t_k, \mathbf{x}(t_k))}{\partial x_i}, \; i = 1, \dots, n. \tag{5.48}$$

Далее, вместо условия (5.38) здесь получим следующее условие

$$\left[-H + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\dot{x}_i + \mu\dot{\varphi}\right]_{t=t_k}\delta t_k = 0.$$

С использованием представления гамильтониана (5.32) запишем это условие в виде

$$\left[F - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i + \frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\dot{x}_i + \mu\dot{\varphi}\right]_{t=t_k}\delta t_k = [F + \dot{G} + \mu\dot{\varphi}]_{t=t_k}\delta t_k = 0.$$

Откуда в силу произвольности вариаций δt_k находим

$$\mu = -\frac{F + \dot{G}}{\dot{\varphi}}\Bigg|_{t=t_k}. \tag{5.49}$$

Считая выполненными условия (5.36), (5.48) и (5.49), найдем, что малое

приращение ΔL лагранжиана (5.46), определяемое малыми приращениями $\Delta u_j(t)$ управлений, составит

$$\Delta L = -\int_{t_0}^{t_k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_j}\Delta u_j\,dt. \tag{5.50}$$

Если выбрать

$$\Delta u_j(t) = \alpha_j\frac{\partial H}{\partial u_j}, \tag{5.51}$$

где $\alpha_j = \alpha_j(t)$ – функция времени, то приращение ΔL составит

$$\Delta L = -\int_{t_0}^{t_k}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)^2 dt. \tag{5.52}$$

Следовательно, если принять $\alpha_j(t)$ положительными и достаточно малыми, то приращение ΔL, определяемое приращением управления $\Delta\mathbf{u}(t)$, будет отрицательно.

Функция $\alpha_j(t)$ играет роль величины шага, выполняемого в области U_m вдоль координаты u_j в направлении увеличения H. Величины Δu_j не должны превышать заданного ограничения:

$$\Delta u_j < \Delta u_{j0}, \quad j = 1, \dots, m; \tag{5.53}$$

кроме того, управление $\mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$ должно принадлежать области U_m.

Если на всем интервале $[t_0; t_k]$ для всех j не находится таких $\alpha_j > 0$, при которых выполняются сформулированные выше требования, то управление $\mathbf{u}(t)$ является оптимальным.

Используя рассмотренный подход, можно построить итерационный процесс определения $\mathbf{u}^{(k)}(t)$, в котором каждое новое приближение к управлению $\mathbf{u}^{(k+1)}(t)$ таково, что $J(\mathbf{u}^{(k+1)}) < J(\mathbf{u}^{(k)})$. Если функционал $J(\mathbf{u})$ ограничен снизу, то последовательность $J(\mathbf{u}^{(k)})$ сходится к минимальному значению функционала J, а последовательность функций $\Delta\mathbf{u}^{(k)}(t)$ сходится к нулю на всем отрезке $[t_0; t_k]$.

Алгоритм решения задачи следующий.

Перед началом вычислений составляют гамильтониан H, сопряженную систему уравнений (5.36); записывают аналитические выражения функций $\frac{\partial H}{\partial u_j}$, $\frac{\partial G(\mathbf{x}(t_k))}{\partial x_i}$, $\frac{\partial\varphi(t_k, \mathbf{x}(t_k))}{\partial x_i}$, $\dot{G}(\mathbf{x}(t_k))$ и $\phi(t_k, \mathbf{x}(t_k))$. Если получить аналитические выражения затруднительно, то значения этих функций далее определяют численно.

Выбирают начальное приближение $\mathbf{u}^{(0)}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$ вектора $\mathbf{u}(t)$ так, чтобы в результате решения задачи Коши (5.26)-(5.27) приблизительно выполнялось условие (5.45).

На k-й итерации ($k = 0, 1, 2, \ldots$) выполняют следующие действия.

1^0. Методом численного интегрирования решают задачу Коши (5.26)-(5.27) до момента времени $t = t_k$, при котором хотя бы приблизительно выполняется условие (5.45). Если выполнить условие (5.45) не удается, то в качестве t_k выбирают момент достижения минимума функции $\varphi(t, \mathbf{x}(t))$.

На каждом шаге численного интегрирования вычисляют значения функции F для последующего вычисления $J(\mathbf{u}^{(k)})$ по (5.29).

Для момента времени $t = t_k$ определяют значения $\mathbf{x}(t_k)$, $F(t,\mathbf{x},\mathbf{u})|_{t=t_k}$, $G(\mathbf{x}(t_k))$. Находят $\dot{G}(\mathbf{x}(t_k))$ и $\dot{\varphi}(t_k, \mathbf{x}(t_k))$ и далее – число μ и значения множителей Лагранжа $\lambda_i(t_k)$ по формулам (5.49) и (5.48).

2^0. Находят $J(\mathbf{u}^{(k)})$ и проверяют (если $k > 0$) выполнение условия

$$J(\mathbf{u}^{(k)}) < J(\mathbf{u}^{(k-1)}). \tag{5.54}$$

Если условие (5.54) не выполнено, то возвращаются к пункту 3^0 на $(k-1)$-й итерации и полагают $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$. Если условие (5.54) снова не выполняется, то полагают $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \frac{1}{4}\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ и так до тех пор, пока условие (5.54) не выполнится.

3^0. Интегрируют основную и сопряженную системы уравнений (5.26) и (5.36) с использованием управления $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ в обратном времени $\tau = t_k - t$ при начальных условиях $\mathbf{x}(\tau = 0) = \mathbf{x}(t_k)$; $\lambda(\tau = 0) = \lambda(t_k)$. На каждом r-м шаге численного интегрирования для момента времени t_r вычисляют значения функций $x_i(t_r)$, $\lambda_i(t_r)$, $\alpha_j(t_r)$, F и по формуле (5.51) – $\Delta u_j(t_r)$ (заметим, что систему (5.26) на этом шаге можно не интегрировать, а значения $x_i(t_r)$ взять с шага 1^0). При этом коэффициенты $\alpha_j(t_r)$ подбирают так, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}^{(k)} \in U_m. \tag{5.55}$$

Найденные значения $\mathbf{u}^{(k+1)}$ принимают за новое (улучшенное) управление.

Пункты 1^0-3^0 повторяются, пока не выполнятся принятые условия окончания вычислений. В качестве условий окончания можно взять

$$\left[\begin{array}{l} |J(\mathbf{u}^{(k+1)}) - J(\mathbf{u}^{(k)})| \le \varepsilon; \\ \max\limits_{t\in[t_0,t_k]} \left\| \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)} \right\| \le \delta, \end{array}\right. \tag{5.56}$$

где ε и δ – малые, наперед заданные числа.

Во многих задачах достаточно сложно подобрать значения коэффициентов $\alpha_j(t_r)$. Здесь можно предложить несколько различных схем; одна из них такова:

Вычисляется $\Delta\bar{u}_j(t_r) = \alpha_0 \left.\dfrac{\partial H}{\partial u_j}\right|_{t=t_r}$, где α_0 – заданное число.

Полагается

$$\Delta u_j = \begin{cases} \Delta\bar{u}_j, & \text{если } |\Delta\bar{u}_j| \le \Delta u_{j0}; \\ \Delta u_{j0}\,\mathrm{sign}\,\dfrac{\partial H}{\partial u_j}, & \text{если } |\Delta\bar{u}_j| > \Delta u_{j0}. \end{cases}$$

Проверяется выполнение условия (5.55), и в случае его невыполнения коэффициенты $\alpha_j(t_r)$ подбираются так, чтобы $\mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}^{(k)}$ оказалось на границе Γ_m области U_m.

Другие схемы выбора шага в градиентных методах минимизации функционалов приведены, например, в [3].

Наибольшей проблемой при применении метода градиента может явиться неустойчивость решения сопряженной системы уравнений (5.36) в обратном времени, характеризующаяся экспоненциальным ростом переменных и ошибок численного решения. Частично эту проблему можно преодолеть введением относительных переменных, имеющих меньшие численные значения по сравнению с исходными. Область устойчивости решения при этом не изменится, но показатель экспоненты, характеризующей рост переменных, уменьшится, что позволит найти решение задачи на ограниченном отрезке времени.

5.5 Метод штрафных функций

Метод штрафных функций позволяет решать задачи с несколькими граничными условиями, заданными при $t = t_k$.

Метод используется для нахождения оптимального управления системой, описываемой системой дифференциальных уравнений (5.26) с начальными условиями (5.27), функционалом качества (5.29) и допустимыми управлениями (5.30). Для конечного момента времени $t = t_k$, который не задан, поставлено условие (5.45). Кроме того, для этого момента поставлено q условий вида

$$\varphi_s(\mathbf{x}(t_k)) = 0, \quad s = 1, \ldots, q. \tag{5.57}$$

Идея метода состоит в том, что используется вычислительная схема метода градиента (подраздел 5.4), где вместо функции $G(\mathbf{x}(t_k))$, используемой в выражении (5.47), рассматривается функция

$$G_1(\mathbf{x}(t_k)) = G(\mathbf{x}(t_k)) + \Phi(\mathbf{x}(t_k)) = G(\mathbf{x}(t_k)) + \sum_{s=1}^{q} w_s \varphi_s^2(\mathbf{x}(t_k)). \tag{5.58}$$

Здесь w_s – весовые коэффициенты, определяемые «важностью» s-го условия. В (5.58) Φ – мера отклонения от заданных краевых условий (функция штрафа).

Условия типа (5.57) могут быть поставлены, например, в задаче о выведении КА в заданную фазовую точку $\mathbf{z}$. В этом случае в качестве функции штрафа берется сумма квадратов отклонений фазовых координат $x_s(t_k)$ от заданных значений z_s:

$$\Phi(\mathbf{x}(t_k)) = \sum_{s=1}^{q} w_s (z_s - x_s(t_k))^2 . \qquad (5.59)$$

Вычислительная схема соответствует схеме, приведенной в подразделе 5.4, в которой $G(\mathbf{x}(t_k))$ заменено на $G_1(\mathbf{x}(t_k))$, в частности, в соотношениях (5.47), (5.48), (5.49).

Заметим, что введение функции штрафа с большими значениями коэффициентов w_s часто ухудшает процесс сходимости к точке минимума функционала J; с другой стороны, слишком малые значения w_s не обеспечивают выполнение условий (5.57) с достаточной точностью. Выбор коэффициентов w_s должен обеспечивать разумный компромисс между скоростью сходимости и точностью выполнения краевых условий.

5.6 Задача о выборе оптимальной программы выведения на орбиту

При известных проектных параметрах РН оптимальной программой выведения на орбиту называют такую программу, которая обеспечивает наибольшую массу выводимой полезной нагрузки с учетом имеющихся ограничений.

Рассмотрим модельную задачу для одноступенчатой РН при следующих предположениях [20]. Будем считать, что поле силы тяжести является плоскопараллельным; вращение Земли и аэродинамические силы не учитываются. Уравнения движения ракеты могут быть представлены в виде (1.58), где положено $g = \text{const}$; $\beta = 0$; индекс i опущен. Здесь, в отличие от условий задачи 5.1, считается, что тяга двигателя $P = I_{y0}\dot{m}$ регулируется за счет изменения секундного расхода топлива $\dot{m} > 0$ при неизменной величине удельного импульса.

Третье уравнение системы (1.58) можно отбросить, поскольку координата x, как будет видно далее, не используется при записи функционала или ограничений задачи.

Будем искать оптимальную программу изменения вектора тяги $\mathbf{P}(t)$ (т.е. программу тангажа $\vartheta(t)$ и расхода топлива $\dot{m}(t)$), которая в конце участка выведения ($t = t_k$) на заданной высоте h^* обеспечит максимум горизонтальной составляющей скорости при нулевой вертикальной составляющей скорости. Условие $V_y(t_k) = 0$ ставится для круговой целевой орбиты с учетом введенных в рассматриваемой задаче предположений. Запас топлива считается неизменным; масса РН в конце участка выведения составляет величину m_k.

В силу обратимости задачи полученное решение будет обеспечивать также достижение максимальной высоты орбиты при заданной скорости или достижение заданных значений высоты и орбитальной скорости при минимальном расходе топлива (максимальной величине m_k).

Для решения задачи используем принцип максимума. Перейдем к обозначе-

ниям, принятым в подразделе 5.2:

$$x_1 = V_x;\quad x_2 = y;\quad x_3 = V_y;\quad x_4 = m;$$

$$u_1 = \cos\vartheta;\quad u_2 = \sin\vartheta;\quad u_3 = \dot{m},$$

и запишем математическую формулировку задачи.

Движение рассматриваемой динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{I_{y0}u_3}{x_4}u_1; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= \frac{I_{y0}u_3}{x_4}u_2 - g; \\ \dot{x}_4 &= -u_3 \end{aligned} \qquad (5.60)$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_{i0},\quad (i = 1, \dots, 4) \qquad (5.61)$$

и условиями при $t = t_k$

$$x_2(t_k) = h^*;\quad x_3(t_k) = 0;\quad x_4(t_k) = m_k. \qquad (5.62)$$

Функционал задачи имеет вид

$$J = -x_1(t_k). \qquad (5.63)$$

Сравнивая (5.63) и (5.29), находим, что в данной задаче

$$F \equiv 0;\quad G(\mathbf{x}(t_k)) = -x_1(t_k).$$

Вспомогательная переменная u_2 связана с переменной управления u_1 соотношением

$$u_1^2 + u_2^2 = 1. \qquad (5.64)$$

Область допустимых управлений ограничена условиями

$$|u_1| \le 1;\quad \beta_{\min} \le u_3 \le \beta_{\max}, \qquad (5.65)$$

где максимальный $\beta_{\max}$ и минимальный $\beta_{\min}$ расходы массы ($\beta_{\min} \ge 0$) определяются конструктивными особенностями РН.

Время выведения t_k заранее не задано.

В соответствии с принципом максимума составим гамильтониан

$$H = \lambda_1 \frac{I_{y0}u_3}{x_4}u_1 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 \frac{I_{y0}u_3}{x_4}u_2 - \lambda_3 g - \lambda_4 u_3. \qquad (5.66)$$

Найдем сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0; \\ \dot{\lambda}_2 &= 0; \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2; \\ \dot{\lambda}_4 &= \frac{I_{y0}u_3}{x_4^2}[\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_2]. \end{aligned} \qquad (5.67)$$

Граничные условия при $t = t_k$: это три условия (5.62); еще одно условие найдем из (5.37) и (5.63)

$$\lambda_1(t_k) = 1. \qquad (5.68)$$

Используя (5.64), перепишем (5.66) в виде

$$H = u_3\left[\frac{I_{y\partial}}{x_4}(\lambda_1 u_1 + \lambda_3\sqrt{1-u_1^2}) - \lambda_4\right] + \lambda_2 x_3 - \lambda_3 g. \qquad (5.69)$$

Найдем такие u_1 и u_3, при которых функция H принимает наибольшее значение на множестве допустимых управлений. Из (5.69) получим

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{I_{y\partial}u_3}{x_4}\left[\lambda_1 + \lambda_3\frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2}}\right] = 0. \qquad (5.70)$$

Откуда несложно найти $u_1 = \pm\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}}$, однако из выражения (5.66) следует, что величина H достигает максимума, если взять решение со знаком «плюс». Получаем

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}; \; u_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda}, \qquad (5.71)$$

где $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}$.

Далее, поскольку гамильтониан H линейно зависит от u_3, то для достижения наибольшей величины H нужно взять наибольшее допустимое значение u_3 для тех моментов времени, в которые множитель, стоящий в (5.69) в квадратных скобках при u_3, больше нуля; и наименьшее допустимое значение – в противном случае. Запишем

$$u_3 = \beta(R) = \begin{cases}\beta_{max}, & \text{если} \quad R > 0;\\ \beta_{min}, & \text{если} \quad R < 0,\end{cases} \qquad (5.72)$$

где R – функция переключения, которую с учетом (5.71) запишем в виде

$$R = \frac{I_{y\partial}}{x_4}\lambda - \lambda_4. \qquad (5.73)$$

Как следует из (5.72), при оптимальном управлении величина тяги должна быть максимальной или минимальной в зависимости от функции R, которая может несколько раз менять знак на протяжении участка выведения.

Если на некотором конечном интервале времени $R \equiv 0$, то возникает так называемое *особое управление*, и из принципа максимума определить оптимальную величину u_3 нельзя. Этот частный случай требует дополнительного исследования, которое здесь не рассматривается.

Проинтегрируем первые три уравнения сопряженной системы (5.67):

$$\lambda_1 = C_1; \; \lambda_2 = C_2; \; \lambda_3 = -C_2 t + C_3. \qquad (5.74)$$

С учетом граничного условия (5.68)

$$\lambda_1(t) = 1. \qquad (5.75)$$

больших высот целесообразно использовать промежуточный участок с минимальной (или нулевой) тягой (рис. 5.1, *в*), продолжительность которого тем больше, чем выше расположена конечная точка выведения.

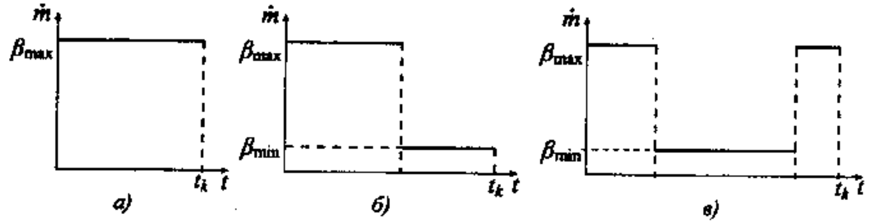


Рис.5.1. Основные оптимальные режимы работы двигателя в задаче выведения

Решение рассмотренной модельной задачи используется при построении программ управления в более точной постановке для выбора начального приближения. Для решения реальных задач могут быть применены численные методы, рассмотренные в подразделах 5.3-5.5. Например, можно воспользоваться методом штрафных функций, записав уравнение (5.45) для определения момента t_k в виде

$$m\big|_{t=t_k} = m_k$$

и приняв функцию штрафа (5.59) в виде

$$\Phi(\mathbf{x}(t_k)) = w_1\left(x_2(t_k) - h^*\right)^2 + w_2 x_3^2(t_k).$$

Если использовать численный алгоритм, предполагающий применение принципа максимума и сведение к краевой задаче, то необходимо учитывать, что метод Ньютона здесь неприменим, как и в других задачах, где имеется релейное управление типа (5.72). Поэтому лучше применить преобразование краевой задачи к задаче минимизации функции штрафа вида (5.43), включающей определение таких значений $\lambda_4(t_0)$, C_2, C_3, при которых выполняется условие

$$\Phi(\lambda_4(t_0), C_2, C_3) \equiv w_1\left(x_2(t_k) - h^*\right)^2 + w_2 x_3^2(t_k) + w_3 H^2(t_k) = 0. \qquad (5.78)$$

В приложении А приведен текст учебной программы для нахождения в рассматриваемой задаче оптимального управления, основанного на минимизации функции (5.78). Программа составлена на языке Object Pascal и оформлена в виде процедуры sqropt. Программа реализует метод покоординатного спуска с квадратичной интерполяцией-экстраполяцией. Каждое вычисление функции (5.78) в рамках метода основано на решении методом Рунге-Кутта четвертого порядка системы уравнений (5.77) с заданными начальными условиями (5.61) и некоторыми значениями $A_1 = \lambda_4(t_0)$, $A_2 = C_2$, $A_3 = C_3$ до момента времени t_k, при котором выполняется условие $x_4(t_k) = m_k$.

Рассмотрим результаты применения программы sqropt в задаче со следующими исходными данными: $V_x(t_0) = 2\,500$ м/с; $y(t_0) = 80$ км;

5.7 Задача о выборе оптимальной программы сближения с целью, находящейся на орбите

Рассмотрим задачу управления движением космического аппарата, сближающегося с целью, находящейся на эллиптической орбите. Целью является космический объект, с которым осуществляется встреча маневрирующего КА. Движение цели и начальные условия движения маневрирующего КА заданы. Задачей является определение оптимальной по выбранному критерию программы изменения величины и направления вектора тяги $\mathbf{P}(t)$, которая обеспечит выведение КА непосредственно в район цели с относительной скоростью, близкой к нулю (условия «мягкой» встречи на этапе ближнего наведения). Критерием оптимальности может являться, например, минимум расхода топлива, либо минимальное время совершения маневра.

Будем считать поле силы тяготения центральным и ограничимся случаем, когда КА движется в плоскости орбиты цели. Уравнения движения КА на участке ближнего наведения удобно рассматривать [20] в орбитальной прямоугольной системе координат *Цxyz*, начало которой совпадает с целью, ось *Цy* направлена по продолжению радиуса-вектора $\mathbf{r}$ цели, ось *Цx* – в плоскости орбиты цели против направления движения (рис. 5.3), а ось *Цz* – перпендикулярно плоскости движения, образуя правую тройку. Величина тяги $P = I_{уд}\dot{m}$ регулируется за счет изменения секундного расхода топлива $\dot{m}$; направление вектора тяги задается углом α_1 по отношению к оси *Цx*.

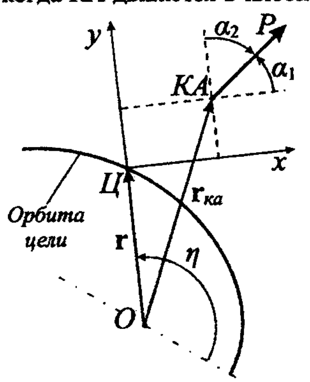


Рис. 5.3. Положение КА в орбитальной системе координат

Введем обозначения:

$$x_1 = x;\quad x_2 = \dot{x}_1;\quad x_3 = y;\quad x_4 = \dot{x}_3;\quad x_5 = m;$$

$$u_1 = \cos\alpha_1;\quad u_2 = \cos\alpha_2;\quad u_3 = \dot{m},$$

где m – текущая масса КА.

Используем уравнение относительного движения

$$\dot{\mathbf{V}}_{отн} = \frac{\mathbf{P}}{m} + \mathbf{g} - \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_k, \tag{5.79}$$

записанное в системе координат *Цxyz*. В этой системе векторы ускорения от силы тяги $\dfrac{\mathbf{P}}{m}$ и гравитационного ускорения $\mathbf{g}$ имеют вид

$$\frac{\mathbf{P}}{m} = \begin{bmatrix} \dfrac{I_{уд}u_3}{x_5}u_1 \\ \dfrac{I_{уд}u_3}{x_5}u_2 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mu x_1}{r_{KA}^3} \\ -\dfrac{\mu(r+x_3)}{r_{KA}^3} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.80}$$

где $r_{KA} = \sqrt{x_1^2 + (r+x_3)^2}$ – радиус КА.

Переносное $\mathbf{w}_e$ и кориолисово $\mathbf{w}_k$ ускорения определяются известными соотношениями

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} - \omega^2\boldsymbol{\rho};\quad \mathbf{w}_k = 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_{отн}), \tag{5.81}$$

где $\mathbf{w}_0 = \left[0;\ -\dfrac{\mu}{r^2};\ 0\right]^T$ – ускорение полюса (цели); $\boldsymbol{\rho} = [x_1;\ x_3;\ 0]^T$ – относительный радиус-вектор КА; $\mathbf{V}_{отн} = [x_2;\ x_4;\ 0]^T$ – вектор относительной скорости КА; $\boldsymbol{\omega} = [0;\ 0;\ \omega]^T$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = [0;\ 0;\ \varepsilon]^T$ – вектор угловой скорости и вектор углового ускорения системы координат *Цxyz*. Модули векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяются параметрами p и e орбиты цели по (2.19) и (2.16). Запишем

$$\omega = \dot{\eta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2}(1 + e\cos\eta)^2;$$

дифференцируя последнее выражение, получим

$$\varepsilon = \ddot{\eta} = -\frac{\sqrt{\mu p}}{p^2}2(1+e\cos\eta)e\dot{\eta}\sin\eta = -\frac{2\mu e}{r^3}\sin\eta.$$

Из (5.81) найдем

$$\mathbf{w}_e = \begin{bmatrix} -\ddot{\eta}x_3 - \dot{\eta}^2 x_1 \\ -\dfrac{\mu}{r^2} + \ddot{\eta}x_1 - \dot{\eta}^2 x_3 \end{bmatrix};\quad \mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} -2\dot{\eta}x_4 \\ 2\dot{\eta}x_2 \end{bmatrix} \tag{5.82}$$

Из (5.79) с учетом выражений (5.80) и (5.82) получим следующие уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\eta}x_3 + \dot{\eta}^2 x_1 + 2\dot{\eta}x_4 - \frac{\mu x_1}{r_{KA}^3} + \frac{I_{уд}u_3}{x_5}u_1; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= \frac{\mu}{r^2} - \ddot{\eta}x_1 + \dot{\eta}^2 x_3 - 2\dot{\eta}x_2 - \frac{\mu(r+x_3)}{r_{KA}^3} + \frac{I_{уд}u_3}{x_5}u_2; \\ \dot{x}_5 &= -u_3. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Известны начальные условия

$$x_i(t_0) = x_{i0},\quad (i = 1, \ldots, 5) \tag{5.84}$$

и конечные условия «мягкой» встречи

$$x_i(t_k) = 0,\quad (i = 1, \ldots, 4). \tag{5.85}$$

Конечное время движения t_k не фиксировано.

Если разыскивается оптимальная программа управления, минимизирующая расход топлива на совершение маневра сближения, то функционал задачи имеет вид

(5.91), следует, что $R\big|_{t=t_k}=0$, т.е. последнее переключение совпадает с моментом окончания маневра.

Для численного решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться методом штрафных функций, записав уравнение (5.45) для определения момента t_k, например, в виде $x_1\big|_{t=t_k}=0$ и выбрав следующую функцию штрафа

$$\Phi(\mathrm{x}(t_k))=w_2x_2(t_k)^2+w_3x_3^2(t_k)+w_4x_4^2(t_k),$$

где w_i – весовые коэффициенты.

Задача 5.5 Рассмотреть задачу оптимизации программы изменения вектора тяги КА $(\dot{m},\alpha_1)$ на участке сближения, которая обеспечит минимизацию времени выполнения маневра t_k. Сформулировать постановку задачи, составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, необходимые для применения метода штрафных функций.

5.8 Задача о выборе оптимальной программы управления спуском с орбиты, обеспечивающей максимальный боковой маневр

Рассмотрим задачу управления движением КА скользящего типа на атмосферном участке траектории спуска с орбиты [19]. Условия движения в точке входа и параметры КА заданы. Задачей является определение оптимальной программы изменения угла крена $\gamma(t)$, которая обеспечит максимальную боковую дальность при отсутствии ограничений на параметры движения (продольную дальность, максимальную перегрузку и т.д.).

В предположениях, сформулированных в подразделе 4.3, уравнения движения КА записываются в виде (4.24)-(4.25). При выборе оптимального управления без ограничения общности можно принять, что вход происходит в плоскости экватора, и исключить из рассмотрения переменную λ, от которой не зависят другие параметры движения; величина λ потребуется лишь при определении дальности атмосферного участка.

Введем обозначения:

$$x_1=V;\ \ x_2=\theta;\ \ x_3=\psi;\ \ x_4=r;\ \ x_5=\varphi;\quad u_1=\cos\gamma;\ \ u_2=\sin\gamma$$

и запишем математическую формулировку задачи.

Движение рассматриваемой динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1=-\sigma_x qg_0-g\sin x_2;$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{x_1}\left(K\sigma_x qg_0u_1-g\cos x_2\right)+\frac{x_1\cos x_2}{x_4};$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1\sigma_x\rho x_1 g_0 - \lambda_2\left[K\sigma_x\frac{\rho}{2}g_0u_1 + \frac{g\cos x_2}{x_1^2} + \frac{\cos x_2}{x_4}\right] +$$

$$+\lambda_3\left[\frac{K\sigma_x g_0}{\cos x_2}\frac{\rho}{2}u_2 + \frac{\cos x_2}{x_4}\cos x_3\,\mathrm{tg}x_5\right] - \lambda_4\sin x_2 - \lambda_5\frac{\cos x_2\sin x_3}{x_4};$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 g\cos x_2 - \lambda_2\left[\frac{g\sin x_2}{x_1} - \frac{x_1\sin x_2}{x_4}\right] + \lambda_3\left[\frac{K\sigma_x\rho x_1 g_0 u_2\sin x_2}{2\cos^2 x_2} -\right.$$

$$\left.-\frac{x_1\sin x_2}{x_4}\cos x_3\,\mathrm{tg}x_5\right] - \lambda_4 x_1\cos x_2 + \lambda_5\frac{x_1\sin x_2\sin x_3}{x_4};$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_3\frac{x_1\cos x_2}{x_4}\sin x_3\,\mathrm{tg}x_5 - \lambda_5\frac{x_1\cos x_2\cos x_3}{x_4};\qquad (5.101)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1\sigma_x g_0\frac{q}{h_м} + \lambda_2\left[\frac{K\sigma_x\rho x_1 g_0}{2h_м}u_1 + \frac{x_1\cos x_2}{x_4^2}\right] -$$

$$-\lambda_3\left[\frac{K\sigma_x\rho x_1 g_0}{2h_м\cos x_2}u_2 + \frac{x_1\cos x_2}{x_4^2}\cos x_3\,\mathrm{tg}x_5\right] + \lambda_5\frac{x_1\cos x_2\sin x_3}{x_4^2};$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_3\frac{x_1\cos x_2}{x_4\cos^2 x_5}\cos x_3.$$

С учетом (5.98) перепишем составляющую $\tilde{H}(u)$ гамильтониана (5.100), зависящую от управления, в виде

$$\tilde{H}(u) = \lambda_2\frac{1}{x_1}K\sigma_x q g_0 u_1 \pm \lambda_3\frac{1}{x_1\cos x_2}K\sigma_x q g_0\sqrt{1-u_1^2}. \qquad (5.102)$$

Из условия максимума функции (5.102) несложно найти:

$$u_1 = \frac{\lambda_2\cos x_2}{\sqrt{\lambda_2^2\cos^2 x_2 + \lambda_3^2}};\quad u_2 = -\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_2^2\cos^2 x_2 + \lambda_3^2}}. \qquad (5.103)$$

Принцип максимума дает также следующие конечные условия для сопряженной системы

$$\lambda_1(t_k) = 0;\ \ \lambda_2(t_k) = 0;\ \ \lambda_3(t_k) = 0;\ \ \lambda_5(t_k) = 1. \qquad (5.104)$$

Подставив найденное управление (5.103) в уравнения гамильтоновой системы (5.93), (5.101), можно прийти к краевой задаче, включающей десять уравнений и такое же число граничных условий (5.94), (5.96), (5.104).

Для определения оптимального значения времени t_k имеется соотношение (5.39).

Численное решение полученной краевой задачи может быть выполнено методом Ньютона, при этом система уравнений (5.42) относительно неизвестных $\lambda_i(t_0)$ примет вид

$$\lambda_1(t_k)=0;\;\; \lambda_2(t_k)=0;\;\; \lambda_3(t_k)=0;\;\; \lambda_5(t_k)=1;\;\; H(t_k)=0. \qquad (5.105)$$

Также для нахождения оптимального управления можно воспользоваться методом градиента, записав уравнение (5.45) для определения момента t_k в виде

$$\varphi \equiv x_4(t_k)-(h_k+R_3)=0. \qquad (5.106)$$

Векторы $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}=\left[\dfrac{\partial G}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial G}{\partial x_5}\right]^T$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}=\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_5}\right]^T$, входящие в выражение (5.48), и функции $\dot G$ и $\dot\phi$, входящие в (5.49), найдем из (5.97) и (5.106)

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}=[0,0,0,0,-1]^T;\;\; \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}=[0,0,0,1,0]^T;\;\; \dot G=-\dot x_5\big|_{t=t_k};\;\; \dot\phi=\dot x_4\big|_{t=t_k}.$$

Это приводит к следующим граничным условиям для $\lambda_i(t_k)$:

$$\lambda_1(t_k)=0;\;\; \lambda_2(t_k)=0;\;\; \lambda_3(t_k)=0;\;\; \lambda_4(t_k)=-\frac{\dot x_5}{\dot x_4};\;\; \lambda_5(t_k)=1.$$

При вычислении частной производной гамильтониана по явно входящему управлению учтем, что $u_2=-\sqrt{1-u_1^2}$ (знак «+» перед радикалом соответствует максимуму J). Из выражения (5.100)) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial u_1}=\frac{K\sigma_x q g_0}{x_1}\left[\lambda_2-\frac{\lambda_3 u_1}{\cos x_2\sqrt{1-u_1^2}}\right].$$

Последнее соотношение может быть использовано для вычисления приращения к управлению по формуле (5.51).

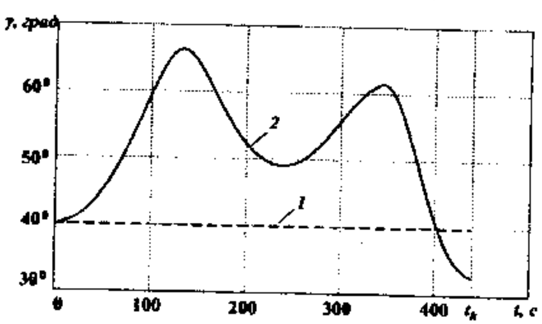


Рис. 5.4. Программы управления $\gamma=\gamma(t)$ в задаче максимизации бокового маневра: 1 – начальная; 2 – оптимальная

На рис. 5.4 показаны результаты численной оптимизации программы угла крена с использованием метода градиента в задаче со следующими исходными данными:

$K=0{,}2$; $\sigma_x=2\cdot10^{-4}$ м·с^2/кг;
$h(t_0)=130$ км;
$V(t_0)=7\,900$ м/с;
$\theta(t_0)=-3^\circ$; $h_k=9$ км.

Оптимизация управления позволила достигнуть величины $L_{бок}=75$ км, увеличение дальности бокового маневра составило 8,6 % по сравнению исходной программой управления $\gamma=\mathrm{const}=40^\circ$.

5.9 Задача о выборе оптимальной программы управления спуском с орбиты, обеспечивающей минимальный приток тепловой энергии

Далее рассмотрим случай, когда целью оптимизации управления движением КА на участке спуска с орбиты является определение программы изменения угла крена $\gamma(t)$, которая обеспечит минимизацию тепловой энергии, подведенной к единице поверхности вблизи критической точки за все время спуска, при ограничении на величину перегрузки.

Поскольку тепловые потоки и перегрузки не зависят от величины и скорости поперечного движения КА, то при выборе оптимального управления в поставленной задаче без ограничения общности можно принять, что траектория движения – плоская кривая, и воспользоваться уравнениями движения КА в виде (4.27). В дальнейшем можно исключить из рассмотрения переменную L, от которой не зависят искомые параметры движения.

Введем обозначения: $x_1=V$; $x_2=\theta$; $x_3=r$; $u=\gamma$ и запишем математическую формулировку задачи. Движение рассматриваемой динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot x_1=f_1\equiv-\sigma_x q g_0-g\sin x_2;$$

$$\dot x_2=f_2\equiv\frac{1}{x_1}(K\sigma_x q g_0\cos u-g\cos x_2)+\frac{x_1\cos x_2}{x_3}; \qquad (5.107)$$

$$\dot x_3=f_3\equiv x_1\sin x_2.$$

Начальные условия – значения переменных состояния в точке входа

$$x_i(t_0)=x_{i0},\quad (i=1,2,3). \qquad (5.108)$$

В этой задаче конечное время t_k также не фиксировано – для его определения используется условие (5.106).

При принятых допущениях о характере движения КА в атмосфере суммарная перегрузка n определяется по формуле (4.2), удельный тепловой поток f – по формуле (4.28). Тогда выражение для суммарного количества тепла Q, подведенного к единице поверхности вблизи критической точки за все время спуска, используя (4.28), (4.29) и (1.64), запишем в виде

$$Q=\int_{t_0}^{t_k} f(t)dt=\int_{t_0}^{t_k} De^{-\frac{r}{2h_н}}V^{3{,}25}dt, \qquad (5.109)$$

где $D=2{,}6\cdot10^{-5}\sqrt{\dfrac{\rho_0}{r_н}}\,e^{\frac{R_3}{2h_н}}$.

Предположим, что целью оптимизации является определение программы $\gamma(t)$, обеспечивающей минимум величины Q при ограничении на величину перегрузки: $n\le n_m$, $t\in[t_0,t_k]$. Таким образом, в нашей задаче требуется найти траекторию движения системы (5.107) на отрезке времени $[t_0;\,t_k]$, на которой функционал

$$J=\int_{t_0}^{t_k}[f(t)+w(n-n_m)|_{n>n_m}]dt=\int_{t_0}^{t_k}F(t)\,dt \qquad (5.110)$$

принимает минимальное значение. Второе слагаемое в подынтегральной функции F играет роль функции штрафа; весовой коэффициент w отражает степень значимости поставленного ограничения.

Составим гамильтониан задачи

$$H=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i f_i-F=-\lambda_1(\sigma_x q g_0+g\sin x_2)+$$
$$+\lambda_2\left[\frac{1}{x_1}(K\sigma_x q g_0\cos u-g\cos x_2)+\frac{x_1\cos x_2}{x_3}\right]+ \qquad (5.111)$$
$$+\lambda_3 x_1\sin x_2-De^{-\frac{x_3}{2h_м}}x_1^{3,25}-w(\sqrt{1+K^2}\sigma_x q-n_m)\Big|_{n>n_m}.$$

Запишем сопряженную систему, включающую уравнения $\dot{\lambda}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$, $i=1,\ 2,\ 3$. Выполнив дифференцирование, получим

$$\dot{\lambda}_1=\lambda_1\sigma_x\rho x_1 g_0-\lambda_2\left[K\sigma_x\frac{\rho}{2}g_0\cos u+\frac{g\cos x_2}{x_1^2}+\frac{\cos x_2}{x_3}\right]+$$
$$-\lambda_3\sin x_2+3{,}25De^{-\frac{x_3}{2h_м}}x_1^{2,25}+w\sqrt{1+K^2}\sigma_x(\rho x_1)\Big|_{n>n_m}; \qquad (5.112)$$
$$\dot{\lambda}_2=\lambda_1 g\cos x_2-\lambda_2\left[\frac{g\sin x_2}{x_1}-\frac{x_1\sin x_2}{x_3}\right]-\lambda_3 x_1\cos x_2;$$
$$\dot{\lambda}_3=-\lambda_1\sigma_x g_0\frac{q}{h_м}+\lambda_2\left[\frac{K\sigma_x\rho x_1 g_0}{2h_м}\cos u+\frac{x_1\cos x_2}{x_3^2}\right]-$$
$$-\frac{1}{2h_м}f-w\sqrt{1+K^2}\sigma_x\left(\frac{q}{h_м}\right)\Big|_{n>n_m}.$$

Для численного нахождения оптимальной программы управления здесь также можно воспользоваться методом градиента.

В данной задаче $G\equiv 0$, и так как можно положить $F(t_k)=0$, то из (5.48) и (5.49) получим следующие граничные условия для $\lambda_i(t_k)$

$$\lambda_1(t_k)=0;\ \ \lambda_2(t_k)=0;\ \ \lambda_3(t_k)=0. \qquad (5.113)$$

Частная производная гамильтониана по явно входящему управлению равна

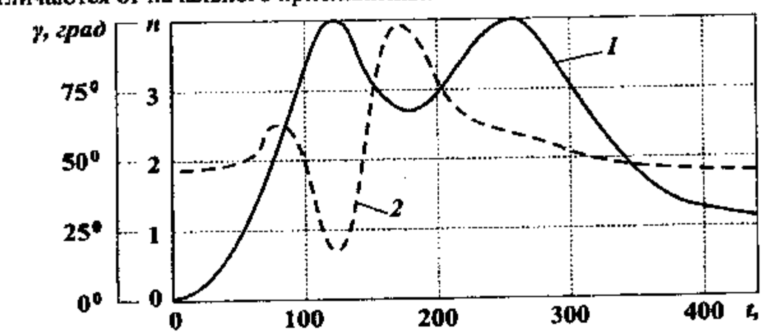
$$\frac{\partial H}{\partial u}=-\lambda_2\frac{K\sigma_x q g_0}{x_1}\sin u. \qquad (5.114)$$

Ниже приводятся результаты численной оптимизации программы угла крена в задаче с исходными данными, характерными при спуске с низких орбит: параметры КА – $K=0{,}4$; $\sigma_x=4\cdot10^{-4}$ м^2/Н; условия входа – $h(t_0)=100$ км; $V(t_0)=7\,800$ м/с; $\theta(t_0)=-3^\circ$; конечная высота $h_k=10$ км. Начальное приближение к управлению выбрано постоянным: $\gamma^{(0)}(t)=45^\circ$.

Для достижения программы управления, признанной оптимальной, потребовалось выполнить 18 итераций. Дальнейшее выполнение алгоритма оптимизации практически не изменяет значение функционала задачи, однако приводит к значительному усложнению программы угла крена, что обычно неприемлемо в практической реализации.

Результаты решения задачи представлены на рис. 5.5. Здесь сплошной линией показан график изменения перегрузки $n(t)$. Видно, что ограничение на перегрузку выполняется. Значение функционала на оптимальной траектории составило 102,9 МДж/м^2.

Оптимальная программа управления углом крена $\gamma=\gamma_{опт}(t)$ показана на рис. 5.5 пунктирной линией. Значения γ в начале и в конце участка торможения не играют большой роли, поэтому по окончании вычислений они незначительно отличаются от начального приближения.



1 – график изменения перегрузки $n(t)$ на оптимальной траектории;
2 – оптимальная программа управления $\gamma_{опт}(t)$

Рис. 5.5. Результаты решения задачи минимизации притока тепловой энергии

Текст учебной программы расчета оптимального угла крена, составленной на языке Object Pascal и оформленной в виде процедуры trc_DM, приведен в Приложении Б. Программа реализует метод градиента в задаче минимизации суммарного притока тепловой энергии Q при ограничении на величину перегрузки с постоянным шагом $\alpha_j(t)=\text{const}$. Решение систем уравнений (5.107), (5.109) ведется методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Вместо условий окончания вычислений (5.56) в процедуре trc_DM заранее задается число итераций maxiter.

5.6 Рассмотреть задачу оптимизации программы изменения угла крена $\gamma(t)$ КА на участке спуска с орбиты, которая обеспечит минимизацию тепловой энергии, подведенной к единице поверхности вблизи критической точки за все время спуска, при ограничении на величину теплового потока f, подведенного к критической точке. Сформулировать постановку задачи, составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, необходимые для применения метода градиента.

5.7 Используя уравнения движения КА в форме (5.108), сформулировать задачу оптимизации программы угла крена $\gamma(t)$, обеспечивающей минимизацию скорости КА в конце участка торможения на заданной высоте. Сформулировать постановку задачи, составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, полученные в результате применения принципа максимума.

5.10 Задача о выборе оптимальной программы управления при посадке на Луну

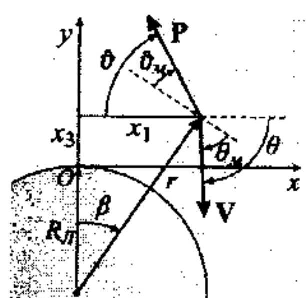


Рис. 5.6. Положение КА в инерциальной системе координат Oxy

Посадка на Луну происходит в отсутствии атмосферы, поэтому торможение КА может выполняться только с помощью двигательной установки. Рассмотрим задачу выбора оптимальной программы изменения вектора тяги, которая обеспечивает мягкую посадку при сходе с окололунной траектории при наименьших затратах топлива.

Гравитационное поле Луны будем считать центральным (гравитационный параметр Луны $\mu = 4\,902{,}65$ км^3/с^2). Инерциальную систему координат Oxy разместим в подспутниковой точке, соответствующей точке схода с окололунной орбиты. Ось Ox направим горизонтально по движению КА, а ось Oy – вертикально вверх. Направление вектора тяги будем определять углом ϑ, отмеряемым от отрицательного направления оси Ox (рис. 5.6). Также будем считать, тяга двигателя $P = I_{y\partial}\dot{m}$ регулируется за счет изменения секундного расхода топлива $\dot{m}$ при неизменной величине удельного импульса. Уравнения движения КА могут быть представлены в виде (1.58), где вместо угла ϑ подставлен угол $-\vartheta$, а индекс i опущен. Несложно убедиться, что $\sin\beta = \dfrac{x_1}{r}$, $\cos\beta = \dfrac{x_3 + R_Л}{r}$, где r – радиус-вектор КА; $R_Л = 1\,736{,}7$ км – радиус Луны.

Будем искать оптимальную программу изменения вектора тяги $\mathbf{P}(t)$ (управление $u(t) = [\dot{m}(t),\ \vartheta(t)]^T$), которая в конце участка торможения на поверхности Луны (при $r = R_Л$) обеспечит нулевую конечную скорость при наибольшем значении $m(t_k)$ – конечной массы КА. Ограничение на дальность участка торможения не ставится, т.к. попадание в нужную точку поверхности может обеспечиваться надлежащим выбором точки схода с окололунной орбиты.

Введем обозначения

$$x_1 = x;\ \ x_2 = V_x;\ \ x_3 = y;\ \ x_4 = V_y;\ \ x_5 = m;$$
$$u_1 = \cos\vartheta;\ \ u_2 = \sin\vartheta;\ \ u_3 = \dot{m}$$

и запишем математическую формулировку задачи.

Движение КА описывается системой дифференциальных уравнений [20]

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2;\\
&\dot{x}_2 = -\frac{I_{y\partial}u_3}{x_5}u_1 - g\frac{x_1}{r};\\
&\dot{x}_3 = x_4;\\
&\dot{x}_4 = \frac{I_{y\partial}u_3}{x_5}u_2 - g\frac{x_3 + R}{r};\\
&\dot{x}_5 = -u_3
\end{aligned} \qquad (5.1$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = 0,\quad x_i(t_0) = x_{i0},\quad i = 2, \ldots, 5 \qquad (5.1$$

и условиями при конечном времени t_k, которое заранее не задано,

$$\left(x_1^2 + (x_3 + R_Л)^2 - R_Л^2\right)\big|_{t=t_k} = 0;\ \ x_2(t_k) = 0;\ \ x_4(t_k) = 0. \qquad (5.1$$

Секундный расход топлива ограничен, так что

$$0 \le u_3 \le \dot{m}_{\max}. \qquad (5.1$$

Функционал задачи запишем в виде

$$J = -x_5(t_k) + w(x_2^2 + x_4^2)\big|_{t=t_k}. \qquad (5.1$$

Первое слагаемое в (5.119) представляет целевую функцию, подлежащ минимизации; второе слагаемое играет роль функции штрафа; весовой коэф циент w отражает степень значимости поставленного ограничения.

Для решения задачи воспользуемся методом штрафных функций. Функ (5.45) составим, используя первое условие (5.117):

$$\varphi \equiv \left(x_1^2 + x_3^2 + 2x_3R_Л\right)\Big|_{t=t_k} = 0; \qquad (5.$$

В данной задаче $F \equiv 0$; $G_1(\mathbf{x}(t_k)) = J$, откуда, с использованием соот шений из подразделов 5.4, 5.5, находим

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}} = [0;\ 2wx_2;\ 0;\ 2wx_4;\ -1]^T;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = [2x_1;\ 0;\ 2(x_3 + R_Л);\ 0;\ 0]^T;$$
$$\dot{G}_1 = \left(-\dot{x}_5 + 2w(x_2\dot{x}_2 + x_4\dot{x}_4)\right)\big|_{t=t_k}; \qquad (5.$$

Задачи

5.6 Рассмотреть задачу оптимизации программы изменения угла крена $\gamma(t)$ КА на участке спуска с орбиты, которая обеспечит минимизацию тепловой энергии, подведенной к единице поверхности вблизи критической точки за все время спуска, при ограничении на величину теплового потока f, подведенного к критической точке. Сформулировать постановку задачи, составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, необходимые для применения метода градиента.

5.7 Используя уравнения движения КА в форме (5.108), сформулировать задачу оптимизации программы угла крена $\gamma(t)$, обеспечивающей минимизацию скорости КА в конце участка торможения на заданной высоте. Сформулировать постановку задачи, составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, полученные в результате применения принципа максимума.

5.10 Задача о выборе оптимальной программы управления при посадке на Луну

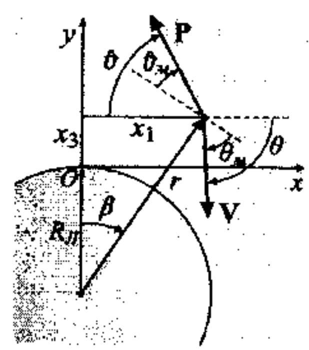


Рис. 5.6. Положение КА в инерциальной системе координат Oxy

Посадка на Луну происходит в отсутствии атмосферы, поэтому торможение КА может выполняться только с помощью двигательной установки. Рассмотрим задачу выбора оптимальной программы изменения вектора тяги, которая обеспечивает мягкую посадку при сходе с окололунной траектории при наименьших затратах топлива.

Гравитационное поле Луны будем считать центральным (гравитационный параметр Луны $\mu = 4\,902{,}65$ км^3/с^2). Инерциальную систему координат Oxy разместим в подспутниковой точке, соответствующей точке схода с окололунной орбиты. Ось Ox направим горизонтально по движению КА, а ось Oy – вертикально вверх. Направление вектора тяги будем определять углом ϑ, отмеряемым от отрицательного направления оси Ox (рис. 5.6). Также будем считать, тяга двигателя $P = I_{y\partial}\dot{m}$ регулируется за счет изменения секундного расхода топлива $\dot{m}$ при неизменной величине удельного импульса. Уравнения движения КА могут быть представлены в виде (1.58), где вместо угла ϑ подставлен угол $-\vartheta$, а индекс i опущен. Несложно убедиться, что $\sin\beta = \dfrac{x_1}{r}$, $\cos\beta = \dfrac{x_3 + R_Л}{r}$, где r – радиус-вектор КА; $R_Л = 1\,736{,}7$ км – радиус Луны.

Будем искать оптимальную программу изменения вектора тяги $\mathbf{P}(t)$ (т.е. управление $u(t) = [\dot{m}(t),\ \vartheta(t)]^T$), которая в конце участка торможения на поверхности Луны (при $r = R_Л$) обеспечит нулевую конечную скорость при наибольшем значении $m(t_k)$ – конечной массы КА. Ограничение на дальность участка торможения не ставится, т.к. попадание в нужную точку поверхности может обеспечиваться надлежащим выбором точки схода с окололунной орбиты.

Введем обозначения

$$x_1 = x;\ \ x_2 = V_x;\ \ x_3 = y;\ \ x_4 = V_y;\ \ x_5 = m;$$

$$u_1 = \cos\vartheta;\ \ u_2 = \sin\vartheta;\ \ u_3 = \dot{m}$$

и запишем математическую формулировку задачи.

Движение КА описывается системой дифференциальных уравнений [20]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2;\\
\dot{x}_2 &= -\frac{I_{y\partial}u_3}{x_5}u_1 - g\frac{x_1}{r};\\
\dot{x}_3 &= x_4;\\
\dot{x}_4 &= \frac{I_{y\partial}u_3}{x_5}u_2 - g\frac{x_3 + R}{r};\\
\dot{x}_5 &= -u_3
\end{aligned} \tag{5.115}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = 0,\quad x_i(t_0) = x_{i0},\quad i = 2, \dots, 5 \tag{5.116}$$

и условиями при конечном времени t_k, которое заранее не задано,

$$(x_1^2 + (x_3 + R_Л)^2 - R_Л^2)\big|_{t=t_k} = 0;\ \ x_2(t_k) = 0;\ \ x_4(t_k) = 0. \tag{5.117}$$

Секундный расход топлива ограничен, так что

$$0 \le u_3 \le \dot{m}_{\max}. \tag{5.118}$$

Функционал задачи запишем в виде

$$J = -x_5(t_k) + w(x_2^2 + x_4^2)\big|_{t=t_k}. \tag{5.119}$$

Первое слагаемое в (5.119) представляет целевую функцию, подлежащую минимизации; второе слагаемое играет роль функции штрафа; весовой коэффициент w отражает степень значимости поставленного ограничения.

Для решения задачи воспользуемся методом штрафных функций. Функцию (5.45) составим, используя первое условие (5.117):

$$\varphi \equiv (x_1^2 + x_3^2 + 2x_3R_Л)\big|_{t=t_k} = 0; \tag{5.120}$$

В данной задаче $F \equiv 0$; $G_1(\mathbf{x}(t_k)) = J$, откуда, с использованием соотношений из подразделов 5.4, 5.5, находим

$$\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{x}} = [0;\ 2wx_2;\ 0;\ 2wx_4;\ -1]^T;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = [2x_1;\ 0;\ 2(x_3 + R_Л);\ 0;\ 0]^T;$$

$$\dot{G}_1 = (-\dot{x}_5 + 2w(x_2\dot{x}_2 + x_4\dot{x}_4))\big|_{t=t_k}; \tag{5.121}$$

$$\phi = \left(2x_1\dot{x}_1 + 2x_3\dot{x}_3 + 2R_Л\dot{x}_1\right)\Big|_{t=t_k}; \quad \mu = -\frac{\dot{G}}{\phi}.$$

Составим гамильтониан

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2\left[-\frac{I_{yд}u_3}{x_5}u_1 - g\frac{x_1}{r}\right] + \lambda_3 x_4 + $$
$$+ \lambda_4\left[\frac{I_{yд}u_3}{x_5}u_2 - g\frac{x_3 + R}{r}\right] - \lambda_5 u_3. \qquad (5.122)$$

Будем считать, что $x_1 << R_Л$; $x_3 << R_Л$, тогда, учитывая характер зависимости $g(r)$ и пренебрегая малыми величинами вида $(x_i / R_Л)^n$, $n > 1$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(g\frac{x_1}{r}\right) = -\frac{g}{r}; \ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(g\frac{x_1}{r}\right) = 0; \ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(g\frac{x_3 + R_Л}{r}\right) = 0; \ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(g\frac{x_3 + R_Л}{r}\right) = \frac{2g}{r}.$$

С учетом последних соотношений получим из (5.122) сопряженную систему уравнений в виде

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\frac{g}{r}; \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1;$$
$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_4\frac{2g}{r}; \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3; \qquad (5.123)$$
$$\dot{\lambda}_5 = \frac{I_{yд}u_3}{x_5^2}[-\lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2].$$

Используя (5.121) и (5.48), запишем граничные условия для сопряженных переменных при $t = t_k$

$$\lambda_1(t_k) = -2\mu x_1; \ \lambda_2(t_k) = -2wx_2;$$
$$\lambda_3(t_k) = -2\mu(x_3 + R_Л); \ \lambda_4(t_k) = -2wx_4; \ \lambda_5(t_k) = 1. \qquad (5.124)$$

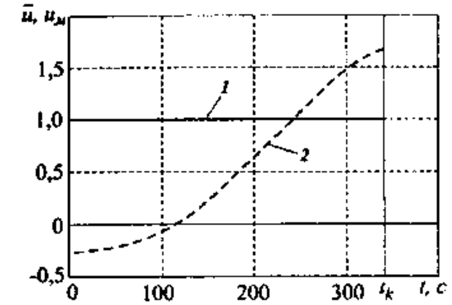
Найдем частные производные, используемые в выражении (5.51). Из (5.122) получим

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{I_{yд}u_3}{x_5}[\lambda_2 \sin\vartheta + \lambda_4 \cos\vartheta] = \frac{I_{yд}u_3}{x_5}[\lambda_2 u_2 + \lambda_4 u_1\}$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_3} = \frac{I_{yд}}{x_5}[-\lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2] - \lambda_5. \qquad (5.125)$$

Итак, соотношения (5.115)-(5.125) являются теоретической основой для численного решения задачи методом штрафных функций.

Приведем результаты численной оптимизации программы управления в задаче с исходными данными, характерными при спуске с окололунной орбиты: $h(t_0) = 100$ км; $V(t_0) = 1\,600$ м/с; $\theta(t_0) = -5^\circ$; $m(t_0) = 15\,000$кг; $I_{yд} = 3\,000$ м/с; $\dot{m}_{max} = 20$ кг/с. Весовой коэффициент w в выражении (5.119) принят равным 0,01.

Результаты решения задачи представлены на рис. 5.7. Здесь сплошной линией показана полученная программа изменения относительного расхода топлива $\bar{u}(t) = \dot{m}(t)/\dot{m}_{max}$; пунктирной линией показана программа изменения $u_м(t) = \mathrm{tg}\,\vartheta_м(t)$, где $\vartheta_м = \vartheta - \beta$ – угол наклона вектора тяги к плоскости местного горизонта. Значение конечной массы для полученной траектории движения $m_k = 8\,220$ кг.



1 – программа управления $u(t)$;
2 – программа управления $u_м(t)$
Рис. 5.7. Результаты численного решения задачи оптимизации управления при посадке на Луну

Как правило, при использовании численных методов последовательного улучшения управления обычно получается не оптимальное, а достаточно хорошее допустимое управление [3]. Рассмотренная задача служит тому подтверждением: ее решение на основе принципа максимума показывает, что оптимальным будет релейное управление величиной тяги, а закон изменения $u_м(t) = \mathrm{tg}\,\vartheta_м(t)$ близок к линейному. Из графика на рис. 5.7 видно, что этот характер зависимости $u_м(t)$ выполняется лишь приближенно, причем зависимость $u_м(t)$ будет ближе к линейной при уменьшении коэффициента w; с другой стороны, при этом получаются значительно бо́льшие отклонения от граничных условий (5.117) по составляющим вектора скорости.

В заключение заметим, что соотношения, приведенные при рассмотрении задачи о посадке КА на Луну, могут быть использованы для решения задачи оптимизации управления при выведении КА на заданную траекторию при отсутствии атмосферы и в предположении центральности поля тяготения.

Задача 5.8 Предполагая поле тяготения Луны центральным, рассмотреть задачу выбора оптимальной программы изменения вектора тяги **P**(t) (т.е. управления $u(t) = [\dot{m}(t), \vartheta(t)]^T$), для которой при максимальном значении конечной массы КА будут выполнены условия выведения на круговую орбиту заданной высоты. Начальные условия движения и начальная масса КА заданы. Сформулировать постановку задачи (включая формулировку конечных условий по высоте, величине скорости и углу наклона траектории), составить гамильтониан, записать сопряженную систему уравнений и граничные условия, необходимые для применения метода штрафных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1 Андреевский В.В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. – М.: Машиностроение, 1970. – 235 с.

2 Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Мишин В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. – М.: Наука, 1966. – 308 с.

3 Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.

4 Баллистические ракеты и ракеты-носители: пособие для студ. вузов / О.М. Алифанов, А.Н. Андреев, В.Н. Гущин и др.; под ред. О.М. Алифанова. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

5 Брандин В.Н., Разоренов Г.Н. Определение траекторий космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 216 с.

6 Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ: справочник. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

7 Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.

8 Иванов Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов: учебник для вузов / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко. – М.: Дрофа, 2004. – 544 с.

9 Инженерный справочник по космической технике / под ред. А.В. Солодова. – М.: Воениздат, 1977. – 430 с.

11 Катулев А.Н., Северцев Н.А. Математические методы в системах поддержки принятия решений. – М.: Высшая школа, 2005. – 311 с.

12 Киреев А.В., Пантелеев В.И. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2004. – 480 с.

13 Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 344 с.

14 Ломако Г.И. Экспериментальная баллистика космических аппаратов. – С-Пб.: ВИККА им. А.Ф. Можайского, 1997. – 454 с.

15 Маркеев А.П. Теоретическая механика: учеб. пособие для ун-тов. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

16 Оптимальное управление движением / В.В. Александров, В.Г. Болтянский и др. – М.: Физматлит, 2005. – 376 с.

17 Пирумов У.Г. Численные методы: учеб. пособие для студ. втузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Дрофа, 2003. – 224 с.

18 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

19 Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник / С.А. Горбатенко, Э.М. Макашов, Ю.Ф. Полушкин, Л.В. Шефтель. – М.: Машиностроение, 1971. – 352 с.

20 Савинов Ю.Г. Математические модели движения летательных аппаратов. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 156 с.

21 Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. – М.: Наука, 1982. – 352 с.

22 Соловьев Ю.А. Спутниковая навигация и ее приложения. – М.: Эко-Трендз, 2003. – 326 с.

23 Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 488 с.

24 Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

25 Яценков В.С. Основы спутниковой навигации. Системы GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 272 с.

26 Центр управления полетами ФГУП ЦНИИМАШ / Ресурс в Интернете: http://www.mcc.rsa.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Текст процедуры sqropt

```
procedure sqropt;

type arrN = array[1..10] of  double;
const maxiter = 100;
var TimePr   : double;        // TimePr – значение t, при котором производится вывод
                              // значений в файл rez
  A          : arrN;
  nk, iter   : integer;
  rez        : textfile;      // файл для вывода результатов

procedure fstraf (A : arrN; var Fi : double);
// процедура вычисления функции штрафа вида (5.44) методом
// численного решения задачи Коши для системы (5.77)
// xk – массив значений искомых переменных; Fi – значение функции штрафа
const n = 5;           // число уравнений в системе (5.77)
    Iud = 3000;        // удельный импульс, м/с
    bmax = 100;        // максимальный расход массы, кг/с
    g = 9.2;           // среднее ускорение силы тяжести на высоте 80...400 км
    mk = 1500;         // конечная масса РН, кг
    hk = 400000;       // высота орбиты, м
var i, kext             : integer;
  k1, k2, k3, k4, Y, z : arrN;  // элементы массива Y[i], i=1,2,3,4  для хранения
                                // переменных x_i;
  h, t                 :double; // элемент массива Y[5]  для хранения переменной λ4
  C2, C3, r1, r2, r3  : double;
  H1, u1, u2, bet, lam       : double;

procedure fct (t : double; Y : arrN; var F : arrN);
// процедура вычисления правых частей дифференциальных уравнений
// в методе Рунге-Кутта
// t – время, h – шаг по времени, Y – массив функций, F – массив производных
// kext<>0 – условие выхода из процедуры rk_4
begin
   lam := sqrt(1+sqr(C3-C2*t));
   u1 := 1/lam;                    // вычисление управления по (5.71)
   u2 := (C3-C2*t)/lam;
   H1 := Iud/Y[4]*lam - Y[5];      // функция переключения (5.73)
```



```
   bet := bmax;
   if H1<0 then bet := 0;    // вычисление управления по (5.72)
   F[1]:= Iud*bet/Y[4]*u1;  // вычисление правых частей уравнений системы (5.77)
   F[2]:= Y[3];
   F[3]:= Iud*bet/Y[4]*u2 - g;
   F[4]:=-bet;
   F[5]:= Iud*bet/sqr(Y[4])*lam;
end;  // процедуры  fct

procedure out (t : double; var h : double; Y,F : arrN; var kext : integer);
// процедура вывода результатов после выполнения очередного шага
// методом Рунге-Кутта
//  t – время, h – шаг по времени, Y – массив функций, F – массив производных
//  kext<>0 – условие выхода из процедуры rk_4.
begin
  if t >= (TimePr-0.001) then begin // проверка условий вывода результатов в файл
    TimePr:=TimePr+5;              // интервал вывода результатов – 5 сек
    writeln (rez,t:5:0, y[1]:9:2, y[2]/1000:8:2, y[3]:9:2, y[4]/1000:8:3,(C3-C2*t):7:2, bet:8:1);
  end;
  if Y[4] < mk then kext := 1;       // проверка условий окончания интегрирования
end; // процедуры  out

begin //  процедуры  fstraf
   t    := 0;
   h    := 1;
   kext  := 0;
   y[1] := 2500;                  // начальные условия (5.61) для переменных x_i
   y[2] := 80000;
   y[3] := 1100;
   y[4] := 15000;
   y[5] := A[1];                  // начальное значение λ4
   C2  := A[2];  C3  := A[3];      // константы C2, C3
                                 // решение задачи Коши для системы уравнений (5.77)
   repeat                        // методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности
       fct(t,y,k1);      // 1-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
       out(t,h,y,k1,kext);   // обращение к процедуре вывода результатов
       if Kext = 0 then begin
         t:=t+h/2;
         for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k1[i]*h/2.;
         fct(t,z,k2);   // 2-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
```

```
        for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k2[i]*h/2.;
        fct(t,z,k3);  // 3-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
        t:=t+h/2;
        for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k3[i]*h;
        fct(t,z,k4);  // 4-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
        for i:=1 to n do y[i]:=y[i]+(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i])*h/6;      // значения функций
                                                                             // y[i] в конце шага
      end;
    until kext <> 0;          // проверка условия окончания интегрирования
                              // Fi – функция штрафа (5.78)
    Fi := 0.000001*sqr(Y[2]-hk) + 0.01*sqr(Y[3]) + 0.001*sqr(bet*H1 + C2*Y[3] + (C2*t-C3)*g);
end; // процедуры fstraf

var i : integer;
  eps, d, F0, F1, F2, FN, x, xm : double;
  st : boolean;

begin                  // процедуры sqropt – минимизации функции
                       // многих переменных методом парабол
 nk := 3;
 eps := 1.0e-6;        // допустимая погрешность ε
 d := 0.02;            // шаг d по координате
 iter:= 0;             // номер итерации
A[1] := -1; A[2] := 0.008; A[3] := 0.7;    // начальные значения A_i
assignfile (rez,'m.txt');
rewrite(rez);          // открытие файла для вывода результатов
TimePr:= 2000;         // при таком значении TimePr вывод рез-тов не производится
repeat
 st := true;
 iter := iter + 1;
 for i := 1 to nk do begin
    x := A[i];
    fstraf(A, F1); // вычисление функции штрафа (5.78) для текущих значений A_i
    A[i] := x - d;
    fstraf(A, F0);
    A[i] := x + d;
    fstraf(A, F2);
                     // вычисление точки экстремума x_m
    xm := (F0*(2*x+d)-4*F1*x+F2*(2*x-d))/2/(F0-2*F1+F2);
    A[i] := xm;
```



```
    fstraf(A, FN);
    if F1<FN then begin xm := x;  FN := F1 end;  // x_m не является точкой минимума
    if F0<FN then begin xm := x-d; FN := F0 end; // тогда выбирается одна из точек
    if F2<FN then begin xm := x+d; FN := F2 end; // x_0, x_1, x_2 для которой
                                                 // функция штрафа – наименьшая
    if abs(xm-x)> eps then st := false;     // проверка условий окончания итераций
    A[i] := xm;
 end;
until (st) or (iter>maxiter);
 TimePr:= 0;
 writeln (rez);
                    // вывод в файл заголовка таблицы
 writeln (rez,'  t,c   Vx,м/c   y,км   Vy,м/c   m,т   tg(tet) расход массы,кг/c  ');
 fstraf(A, FN);
 writeln (rez);
 writeln (rez,' Число итераций= ', iter:3, '  lam4(t=0)=' , A[1]:8:4,
        '  C2=', A[2]:8:6, '  C3=', A[3]:8:5, '  Функция штрафа =', FN:8:3);
 closefile(rez);
end;          // процедуры sqropt
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Текст процедуры trc_DM

```
procedure trc_DM;
const  g0  = 9.81;          // ускорение силы тяжести на Земле
       Rz  = 6371e3;        // радиус Земли
       kk  = 3.968e14;      // гравитационный параметр Земли
       hn  = 7100;          // показатель экспоненты в формуле (1.64)
       r0  = 1.225;         // плотность атмосферы вблизи Земли
       Kt  = 2.6e-5;        // коэффициент при расчете теплового потока в (4.28)
       RadN= 3;             // радиус носового затупления КА
       maxGr= 4;            // ограничение по перегрузке
       w0  = 1000;          // весовой коэффициент при перегрузке в (5.110)
type arrN  = array [1..10] of extended;

var  sx, K : real;
var   i,n, kext, ih, ihk, iter, maxiter   : integer;
   Y, z, k1, k2, k3, k4    : arrN; // элементы Y[i], i=1,2,3  для хранения переменных x;
   h, t, tk, TimePr, Qp, Qt,     // элементы Y[i], i=4,5,6  для хранения переменных λ;
   u, u2, dg, al, dumax, h0, hk, he, g,
   Ksx, q, pl, gamma, FGr, FSum, Nt   : extended;
   rez         : textfile;                  // файл для вывода результатов
   up          : array [0..2000] of extended;  // массив значений угла крена (в град)

procedure fct (t : extended; var Y,F : arrN);
// процедура вычисления правых частей диф.  уравнений в методе
// Рунге-Кутта:  t – время, Y – массив функций, F – массив производных
begin
  he:=Y[3] - Rz;                                  // высота над Землей
  pl := r0 * exp(-he/hn);                         // плотность атмосферы
  q:=pl * Y[1] * Y[1]/2;                          // скоростной напор
  g:=g0 * sqr(Rz/Y[3]);                           // ускорение силы тяжести
  Qp := Kt  * sqrt(pl/RadN) * exp(3.25*ln(Y[1])); // тепловой поток
  Nt := Ksx*q;                                    // перегрузка
  if Nt<=MaxGr then FGr := 0
     else FGr:= w0 * (Nt-MaxGr);   // штраф за превышение ограничения maxGr
  if n=3 then begin                // вычисление правых частей системы (5.107)
     gamma :=up[ih] * pi/180;      // угол крена – перевод в радианы
     u:=cos(gamma);
     u2:=sin(gamma);
     F[1]:=-sx*q*g0-g*sin(Y[2]);  // вычисление правых частей диф. уравнений.
     F[2]:=(K*sx*q*g0*u-g*cos(Y[2]))/Y[1]+Y[1]*cos(Y[2])/Y[3];
     F[3]:=Y[1]*sin(Y[2]);
  end
  else begin  { вычисление правых частей при интегрировании основной и
сопряженной системы уравнений в обратном времени. Здесь параметр t
(время) увеличивается, поэтому производные взяты с противоположными
знаками по сравнению с исходными уравнениями (5.107),(5.112) }
     gamma :=up[ihk-ih] * pi/180;
     u:=cos(gamma);
     u2:=sin(gamma);
     F[1]:=sx*q*g0+g*sin(Y[2]); // вычисление правых частей диф. уравнений
     F[2]:=-(K*sx*q*g0*u-g*cos(Y[2]))/Y[1]-Y[1]*cos(Y[2])/Y[3];
     F[3]:=-Y[1]*sin(Y[2]);
     F[4]:=-Y[4]*sx*pl*Y[1]*g0+Y[5]*(K*sx*pl*g0*u/2+g*cos(Y[2])/Y[1]/Y[1]+cos(Y[2])/Y[3])
          +Y[6]*sin(Y[2]) + Fgr*pl*Y[1] - 3.25*Kt*sqrt(pl/RadN)*exp(2.25*ln(Y[1]))/1000;
     F[5]:=-Y[4]*g*cos(Y[2])+Y[5]*(g*sin(Y[2])/Y[1]-Y[1]*sin(Y[2])/Y[3])
        +Y[6]*Y[1]*cos(Y[2]);
     F[6]:= Y[4]*sx*g0*q/hn-Y[5]*(K*sx*pl*Y[1]*g0*u/2/hn+Y[1]*cos(Y[2])/Y[3]/Y[3])
          - Fgr*pl*q/hn +Qp/2/hn/1000;    // тепловые потоки вычисляются в кВт
  end
end;  // процедуры fct

procedure outp (t : extended; var h : extended; Y,F : arrN; var kext : integer);
// процедура вывода результатов после выполнения очередного шага методом
// Рунге-Кутта:  t – время, h – шаг по времени, Y – массив функций,
// F – массив производных, kext<>0 – условие выхода из процедуры rk_4.
var i : integer;
begin
 if n=3 then begin   // при решении основной системы (5.107)
    ih := ih + 1;    // номер шага по времени
    Qt := Qt + Qp;  // Qp – тепловоq поток, Qt – суммарное количество энергии Q
    FSum := FSum + Qp/1000 + FGr;    // вычисление функционала по (5.110)
    if t >= (TimePr-0.001) then begin // проверка условий вывода результатов в файл
      TimePr:=TimePr+10;              // интервал вывода результатов – 10 с.
      writeln (rez, t:5:0, Y[1]:9:1, (Y[2]*180/pi):7:2, he/1000:8:2, Nt:8:2, FGr:8:2, Qp/1000:8:2,
                   Fsum/1000:12:3); // вывод результатов в файл
    end;
    if ((Y[3]-Rz) <= hk) or (t>=2000) then kext := 1 // проверка условий окончания
                                                     // интегрирования
 end
 else begin  // при решении основной и сопряженной  систем (5.107), (5.112)
    gamma :=up[ihk-ih]*pi/180;                   // угол крена – перевод в радианы
    dg := -al*Y[4]*K*sx*q*g0/Y[1]*sin(gamma); // вычисление приращения по (5.114)
    if abs(dg)>dumax then if dg>0 then dg :=dumax else dg := - dumax;
    gamma := gamma + dg;   // dumax – ограничение на приращение к управлению
```

```
    upl[ihk-ih]:=gamma*180/pi;      //  найденный угол γ записывается
                                    // в массив up (в град)
     ih := ih +1;
     if t >= (TimePr-0.001) then begin // проверка условий вывода рез-тов в файл
        TimePr:=TimePr+10;
        writeln (rez,(tk-t):5:0,(gamma*180/pi):8:3,Y[4]:8:1,Y[5]/1000:8:1,Y[6]:8:1);
     end;
     if (ih>=ihk-1) then kext := 1;    // проверка условия окончания интегрирования
  end
end;  // процедуры outp

procedure rk_4(var t, h : extended; var kext : integer);
// процедура решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений
// методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности
// t – время, h - шаг по времени, kext<>0 – условие выхода из процедуры rk_4.
var i : integer;
begin
    repeat
      fct(t,y,k1);     // 1-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
      outp(t,h,y,k1,kext);  // обращение к процедуре вывода результатов
      t:=t+h/2;
      for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k1[i]*h/2.;
      fct(t,z,k2);     // 2-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
      for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k2[i]*h/2.;
      fct(t,z,k3);     // 3-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
      t:=t+h/2;
      for i:=1 to n do z[i]:=y[i]+k3[i]*h;
      fct(t,z,k4);     // 4-е на шаге вычисление правых частей диф. уравнений
      for i:=1 to n do y[i]:=y[i]+(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i])*h/6; // значения функций y[i]
                                                                 // в конце шага
   until kext <> 0;        // проверка условия окончания интегрирования
   TimePr := 0;
   fct(t,y,k1);
   outp(t,h,y,k1,kext);    // вывод окончательных результатов
end;  // процедуры rk_4

begin  // процедуры trc_DM
 maxiter := 20;            // maxiter – число итераций в методе градиента
 sx := 0.0004;             // баллистический параметр КА
 K  := 0.4;                // аэродинамическое качество КА
 iter := 0;                // iter – номер итерации в методе градиента
 assignfile (rez,'sa.txt');
 rewrite(rez);             // открытие файла для вывода результатов
 Ksx := sqrt(1+K*K)*sx;
```



```
for i := 0 to 2000 do up[i]:= 45;   // начальное значение угла крена 55 градусов
repeat
 iter := iter+1;
 n    := 3;                    // число диф. уравнений в системе (5.107)
 h0   := 100000;               // начальная высота КА
 hk   := 9000;                 // конечная высота КА
 t    := 0;                    // начальное значение времени
 h    := 1.0;                  // шаг по времени
 ih := 1;                      // начальный номер шага по времени
 Qp := 0;
 Qt := 0;
 FGr:= 0;
 FSum := 0;
 Y[1]:=7800;  Y[2]:=-3*pi/180;  Y[3]:=h0+Rz;  // начальные условия (5.108)
                                              // для переменных x_i

 kext  := 0;
 TimePr:= 0;                // TimePr – значение t, для которого производится
                            // вывод промежуточных результатов в файл rez
 writeln(rez, 'Прямой ход');         // заголовок таблицы
 writeln(rez,' t,c  V, м/с tet,град  h,км    n     FGr  Qp,КВт/м2   J/1000');
 rk_4(t, h, kext); // решение задачи Коши для  ур-ний (5.107) с условиями (5.108)
 writeln(rez);
 writeln(rez,'iter=',iter:3, ' tk=',t:5:2, '  J=', (FSum):9:3, '  Кол-во тепла Q[МДж/м2]=',
          (Qt/1E+6):8:3);
 tk := t;           // конечное время t_k
 ihk:= ih;          // количество шагов, выполненных по методу Рунге-Кутта
 n   := 6;          // число диф. уравнений в системе (5.107), (5.112)
 t   := 0;          // начальное значение времени
 kext  := 0;
 TimePr:= 0;
 ih   := 0;                        // начальный номер шага по времени
 Y[4]:=0;  Y[5]:=0;  Y[6]:=0;      // граничные условия (5.113) для переменных λ_i
 al := 1;                          // шаг a_j в методе градиента
 dumax := 0.03;                    // ограничение на приращение управления Δu_j0
 writeln(rez);
 writeln(rez,'Обратный ход');
 writeln(rez,'  t  g,град    l1    l2    l3 ');     // заголовок таблицы
 rk_4(t, h, kext);  // решение задачи Коши для  уравнений (5.107), (5.112)
                    // с условиями (5.108), (5.113)
 writeln(rez);
until iter=maxiter;
closefile(rez);
end;  // процедуры trc_DM
```

Ю.Г. Савинов

Анализ и оптимизация траекторий движения космических летательных аппаратов

Подписано в печать 11.06. 2007 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Плотность 80 гр./см. Белизна 95 % . Печать RISO.
Усл. печ. листов 10. Объем 160 стр.
Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии «Эверо»
РК, г. Алматы, 050058, ул. Байтурсынова, 22.
Тел. 8 (327) 233-82-69, 233-83-89, тел./факс 8 (327) 233-83-43.
E-mail: evero@nursat.kz